

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Tu pars de 1 000 m d'altitude et tu arrives à 2 000 m : es-tu forcément passé par 1 500 m ? Oui... à condition de ne pas avoir fait de « saut ». C'est toute l'idée de la continuité.

Ce que tu vas savoir faire

- Reconnaître une fonction continue et connaître les fonctions continues usuelles
- Savoir qu'une fonction dérivable est continue (et que la réciproque est fausse)
- Déterminer la limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ grâce à la continuité de f
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire (existence, unicité)
- Lire un tableau de variations pour compter les solutions de $f(x) = k$
- Encadrer une solution par balayage ou par dichotomie (avec Python)

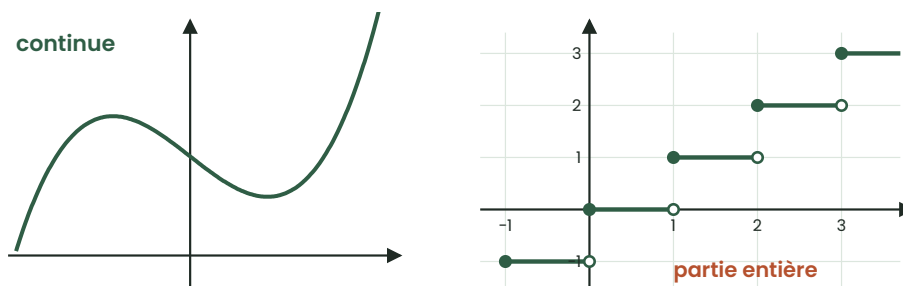
À revoir avant de commencer

- Limites de fonctions (fiche 3)
- Limites de suites, suites monotones bornées (fiche 2)
- Raisonnement par récurrence (fiche 1)
- Dérivation et sens de variation (fiche 4)

1 Le cours

L'intuition : tracer sans lever le crayon

Une fonction est **continue** sur un intervalle si on peut tracer sa courbe **sans lever le crayon** : pas de « saut », pas de « trou ». Au contraire, la fonction partie entière fait des sauts à chaque entier.



À gauche, une fonction continue. À droite, la fonction partie entière : un point plein est sur la courbe, un point creux n'y est pas.

Définition – Continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

- f est **continue en a** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- f est **continue sur I** si elle est continue en tout réel de I .

Propriété – Les fonctions continues usuelles (admis)

- Les polynômes et l'exponentielle sont continus sur $\mathbb{R}$; la racine carrée sur $[0 ; +\infty[$; la fonction inverse (et toute fonction rationnelle) sur chaque intervalle où elle est définie.
- Une somme, un produit, un quotient (dénominateur non nul) ou une composée de fonctions continues est continue.

Définition – Partie entière

La **partie entière** d'un réel x , notée $E(x)$ (ou `floor(x)` en Python), est le plus grand entier inférieur ou égal à x . Exemples : $E(2,7) = 2$, $E(5) = 5$, $E(-1,3) = -2$ (et non -1 !).

Elle n'est pas continue en 1 : pour $x \in [0 ; 1[$, $E(x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} E(x) = 0$, alors que $E(1) = 1$. De même, elle est discontinue en chaque entier.

Exemple résolu – Une fonction définie « par morceaux »

Soit a un réel et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ si $x \leq 1$ et $f(x) = ax - 1$ si $x > 1$. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Solution

Sur $] -\infty ; 1]$ et sur $]1 ; +\infty[$, f est un polynôme, donc continue. Le seul problème possible est en 1. On a $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a \times 1 - 1 = a - 1$. Les deux morceaux se « recollent » si et seulement si $a - 1 = 2$, soit $a = 3$.

Continuité et dérivabilité

Théorème

Si f est **dérivable** en a , alors f est **continue** en a . Ainsi, toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I .

Pourquoi ? Pour $h \neq 0$: $f(a+h) - f(a) = h \times \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Quand $h \rightarrow 0$, le quotient tend vers $f'(a)$ et h tend vers 0, donc le produit tend vers $0 \times f'(a) = 0$. Ainsi $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$: f est continue en a . ■

Attention : la réciproque est fausse

La fonction racine carrée est continue en 0 mais **pas dérivable** en 0 (sa courbe y a une tangente verticale). De même, la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0 (sa courbe y forme un « coin »).

Continuité et suites

Propriété – Image d'une suite convergente (admis)

Si une suite (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ , alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Exemple : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ (pour $n \geq 1$) converge vers 1 et la fonction exponentielle est continue en 1, donc $e^{u_n} = e^{1+\frac{1}{n}}$ converge vers $e^1 = e$.

Théorème – Limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ (théorème du point fixe)

Soit (u_n) une suite définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ , alors $\ell = f(\ell)$.

Pourquoi ?

D'une part, (u_{n+1}) converge vers ℓ (ce sont les mêmes termes, décalés d'un rang). D'autre part, f étant continue en ℓ , $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$. Or $u_{n+1} = f(u_n)$: c'est la même suite. Par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$. ■

Exemple résolu – Retour sur la suite de la fiche 1

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. On a démontré par récurrence (fiche 1) que pour tout n : $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$. Déterminer la limite de (u_n) .

Solution

Convergence. La suite est croissante et majorée par 2, donc elle converge vers un réel ℓ (fiche 2). Comme $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n , on a aussi $1 \leq \ell \leq 2$.

Équation. $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$ est continue sur $[-2; +\infty[$, donc en ℓ . D'après le théorème, $\ell = \sqrt{\ell+2}$. En élevant au carré : $\ell^2 = \ell + 2$, soit $\ell^2 - \ell - 2 = 0$, c'est-à-dire $(\ell - 2)(\ell + 1) = 0$.

Conclusion. $\ell = 2$ ou $\ell = -1$; comme $\ell \geq 1$, on obtient $\ell = 2$. La suite converge vers 2.

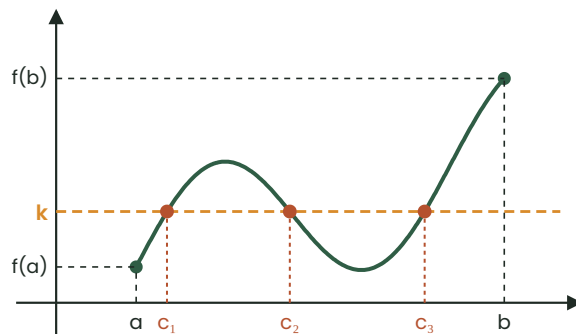
Méthode : variations de $f \rightarrow$ encadrement et monotonie de (u_n) par récurrence $\rightarrow$ convergence (suite monotone bornée) $\rightarrow$ résolution de $\ell = f(\ell)$ en justifiant la continuité, puis **choix** de la bonne solution grâce à l'encadrement.

Le théorème des valeurs intermédiaires

Si tu pars de 1 000 m d'altitude et que tu arrives à 2 000 m sans jamais sauter, tu es forcément passé, au moins une fois, par l'altitude 1 500 m. C'est exactement ce que dit le théorème suivant.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI, admis)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins un** réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.



f est continue sur $[a; b]$ et k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$: l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution (ici trois : c_1, c_2, c_3).

Corollaire – Cas d'une fonction strictement monotone

Si f est **continue** et **strictement monotone** sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans $[a; b]$.

Rédaction : on cite les **trois** ingrédients (continuité, stricte monotonie, k compris entre les valeurs aux bornes), puis « d'après le corollaire du TVI... ».

Remarques

- Le TVI et son corollaire s'étendent aux intervalles ouverts ou non bornés, en remplaçant $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de f aux bornes (voir l'exemple ci-dessous).
- Convention** : dans un tableau de variations, une flèche oblique signifie que la fonction est continue et strictement monotone sur l'intervalle correspondant.
- Sans continuité, le théorème est faux : la partie entière vaut 0 en 0 et 1 en 1, mais ne prend jamais la valeur 0,5.

Exemple résolu – Existence, unicité, encadrement

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α , puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Solution

Variations. $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (limites du terme de plus haut degré x^3).

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Existence et unicité. f est continue (polynôme) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et 0 est compris entre $-\infty$ et $+\infty$. D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Encadrement. $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$, donc $\alpha \in]0; 1[$. Avec la calculatrice (table de valeurs) : $f(0,68) \approx -0,006 < 0$ et $f(0,69) \approx 0,019 > 0$. Donc $0,68 < \alpha < 0,69$.

2 Les pièges à éviter

Attention – Les erreurs classiques

- **Oublier la continuité** en appliquant le TVI : c'est l'hypothèse essentielle, il faut toujours la citer.
- **Croire que le TVI donne l'unicité.** Le TVI seul donne « au moins une » solution. Pour « une unique » solution, il faut en plus la **stricte monotonie**.
- **Oublier de vérifier que k est entre $f(a)$ et $f(b)$.** Pour $f(x) = 0$, on vérifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.
- **Croire que « continue » entraîne « dérivable ».** C'est l'inverse : $\sqrt{x}$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.
- **Croire que $\ell = f(\ell)$ prouve la convergence.** Cette équation donne seulement les limites **possibles** : il faut d'abord justifier que la suite converge, puis choisir la bonne solution.
- **Se tromper sur la partie entière des négatifs** : $E(-2,5) = -3$, pas -2 .

3 Avec Python

Deux algorithmes du programme pour **encadrer** une solution de $f(x) = 0$:

- **Balayage** : on calcule $f(a)$, $f(a + p)$, $f(a + 2p)$... avec un pas p jusqu'à ce que f change de signe. On recommence avec un pas 10 fois plus petit pour gagner une décimale.
- **Dichotomie** : on part de $[a ; b]$ où f change de signe, on calcule $f(m)$ avec $m = \frac{a+b}{2}$ et on garde la moitié où f change encore de signe. À chaque étape, la longueur est **divisée par 2** : après n étapes, elle vaut $\frac{b-a}{2^n}$.

On les applique à $f(x) = x^3 + x - 1$ (exemple du cours), croissante et changeant de signe sur $[0 ; 1]$.

```
def f(x):
    return x**3 + x - 1

def balayage(f, a, pas):
    """f croissante avec f(a) < 0 : on avance tant que f reste négative"""
    x = a
    while f(x + pas) < 0:
        x = x + pas
    return round(x, 6), round(x + pas, 6)

def dichotomie(f, a, b, precision):
    """f continue, f(a) et f(b) de signes contraires"""
    while b - a > precision:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) <= 0:      # changement de signe dans [a ; m]
            b = m
        else:                    # sinon, il est dans [m ; b]
            a = m
    return a, b

print(balayage(f, 0, 0.1))
print(dichotomie(f, 0, 1, 0.01))
# Résultat affiché :
# (0.6, 0.7)
# (0.6796875, 0.6875)
```

Python

La dichotomie a fait 7 étapes : la longueur finale est $\frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} \approx 0,0078 < 0,01$. **Pour aller plus loin :** la méthode de Newton (facultative) remplace la courbe par sa tangente et utilise $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$; elle converge encore plus vite.

4 Exercices

Exercice 1 ★

- Donner $E(3,7)$, $E(-0,5)$ et $E(5)$. Justifier que la fonction partie entière n'est pas continue en 2.
- Soit a un réel et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$ si $x \leq 2$ et $f(x) = -x + a$ si $x > 2$. Déterminer a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 ★

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$ définie sur $[0; 1]$.

- Étudier les variations de f sur $[0; 1]$.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$.
- Par balayage, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

Exercice 3 ★★

Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-3; 5]$. Déterminer, en justifiant, le nombre de solutions de chacune des équations :

(a) $f(x) = 0$; (b) $f(x) = 3$; (c) $f(x) = -2$; (d) $f(x) = 5$.

x	-3		1		5
f	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

Exercice 4 ★★

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. On note $f(x) = \sqrt{3x + 4}$ sur $[-\frac{4}{3}; +\infty[$.

- Calculer u_1 et u_2 .
- Étudier le sens de variation de f .
- Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
- En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

Exercice 5 ★★★ – Type bac

Partie A. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x e^x - 1$.

- Calculer $g'(x)$ et étudier les variations de g sur $[0; +\infty[$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
- En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

Partie B. Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (x - 1) e^x - x + 3$.

- Montrer que $f'(x) = g(x)$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$ (sans les limites).

5. Justifier que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$, puis montrer que le minimum de f vaut $f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{1}{\alpha}$.
6. En utilisant $0,5 < \alpha < 0,6$, montrer que $f(\alpha) > 0$. Que peut-on en déduire pour f ?

5 Teste-toi (QCM)

- 1 f est continue sur $[a; b]$, avec $f(a) = -2$ et $f(b) = 3$. Alors :
- A. f s'annule exactement une fois sur $[a; b]$ B. f s'annule au moins une fois sur $[a; b]$
 C. f est croissante sur $[a; b]$ D. f ne s'annule pas sur $[a; b]$
- 2 Laquelle de ces affirmations est vraie ?
- A. Toute fonction continue est dérivable B. Toute fonction dérivable est continue
 C. $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en 0 D. La partie entière est continue sur $\mathbb{R}$
- 3 La partie entière de $-2,5$ vaut :
- A. -2 B. -3
 C. 2 D. $-2,5$
- 4 Une suite vérifie $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3$ et converge. Sa limite est :
- A. 3 B. 6
 C. 0 D. 2
- 5 On applique la dichotomie en partant de l'intervalle $[1; 2]$. Après 3 étapes, la longueur de l'intervalle obtenu est :
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{6}$
 C. $\frac{1}{8}$ D. 0,3

L'essentiel à retenir

- f continue en $a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- Continue sur un intervalle : courbe tracée sans lever le crayon.
- Polynômes, exponentielle, racine carrée, fonctions rationnelles : continues là où elles sont définies ; opérations et composées aussi.
- Dérivable $\Rightarrow$ continue (réciproque fautive : $\sqrt{x}$ en 0).
- La partie entière est discontinue en chaque entier.
- $u_n \rightarrow \ell$ et f continue en $\ell \Rightarrow f(u_n) \rightarrow f(\ell)$.
- $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ , f continue en $\ell \Rightarrow \ell = f(\ell)$.
- TVI** : f continue sur $[a; b]$, k entre $f(a)$ et $f(b) \Rightarrow$ au moins un c avec $f(c) = k$.
- Si de plus f est strictement monotone : c est **unique**.
- Dichotomie : longueur divisée par 2 à chaque étape.

6 Corrigés

Exercice 1

- $E(3,7) = 3$, $E(-0,5) = -1$, $E(5) = 5$. Pour $x \in [1; 2[$, $E(x) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} E(x) = 1 \neq E(2) = 2$: E n'est pas continue en 2.
- f est continue sur $] -\infty; 2]$ et sur $]2; +\infty[$ (polynômes). En 2 : $f(2) = 4 - 3 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2 + a$. Continuité $\iff -2 + a = 1 \iff a = 3$.

Exercice 2

- $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Sur $[0; 1[$, $f'(x) < 0$ (et $f'(1) = 0$) : f est strictement décroissante sur $[0; 1]$.
- f est continue (polynôme) et strictement décroissante sur $[0; 1]$, $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$: 0 est compris entre $f(1)$ et $f(0)$. D'après le corollaire du TVI, $f(x) = 0$ a une unique solution $\alpha \in [0; 1]$.
- $f(0,3) = 0,127 > 0$ et $f(0,4) = -0,136 < 0$, donc $0,3 < \alpha < 0,4$.

Exercice 3

f est continue et strictement monotone sur $[-3; 1]$ et sur $[1; 5]$ (flèches) : on applique le corollaire du TVI sur chacun.

(a) Sur $[-3; 1]$, f décroît de 4 à -2 et $0 \in [-2; 4]$: une solution. Sur $[1; 5]$, f croît de -2 à 3 et $0 \in [-2; 3]$: une solution. **Deux solutions.**

(b) $3 \in [-2; 4]$: une solution sur $[-3; 1]$; $3 \in [-2; 3]$: une solution sur $[1; 5]$ (c'est $x = 5$). **Deux solutions.**

(c) -2 est le minimum, atteint seulement en $x = 1$: **une solution.**

(d) Le maximum de f est $4 < 5$: **aucune solution.**

QCM

- B (TVI ; A est faux sans stricte monotonie) · 2. B · 3. B ($-3 \leq -2,5 < -2$) · 4. B ($x \mapsto \frac{x}{2} + 3$ est continue, donc $\ell = \frac{\ell}{2} + 3$, soit $\ell = 6$) · 5. C ($\frac{2-1}{2^3} = \frac{1}{8}$)

Exercice 4

- $u_1 = \sqrt{4} = 2$ et $u_2 = \sqrt{10} \approx 3,16$.
- $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = 3x + 4$: $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}} > 0$ sur $] -\frac{4}{3}; +\infty[$: f est croissante sur $] -\frac{4}{3}; +\infty[$.
- Init.** $0 \leq u_0 = 0 \leq u_1 = 2 \leq 4$. **Hérédité.** Si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$, f étant croissante : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$, soit $0 \leq 2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$. **Conclusion** par récurrence.
- (u_n) est croissante et majorée par 4 : elle converge vers $\ell \in [0; 4]$. f est continue en ℓ , donc $\ell = \sqrt{3\ell + 4}$, d'où $\ell^2 - 3\ell - 4 = 0$, soit $(\ell - 4)(\ell + 1) = 0$. Comme $\ell \geq 0$: $\ell = 4$.

Exercice 5

- $g'(x) = e^x + x e^x = (1+x)e^x > 0$ sur $[0; +\infty[$: g est strictement croissante. Par produit, $x e^x \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
- g est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, $g(0) = -1 < 0$ et g tend vers $+\infty$: d'après le corollaire du TVI, $g(x) = 0$ a une unique solution α . Calculatrice : $g(0,56) \approx -0,020 < 0$ et $g(0,57) \approx 0,008 > 0$, donc $0,56 < \alpha < 0,57$.
- g est strictement croissante et $g(\alpha) = 0$: $g(x) < 0$ sur $[0; \alpha[$ et $g(x) > 0$ sur $] \alpha; +\infty[$. 4. $f'(x) = e^x + (x-1)e^x - 1 = x e^x - 1 = g(x)$. Donc f est décroissante sur $[0; \alpha]$ et croissante sur $[\alpha; +\infty[$, avec $f(0) = -1 + 3 = 2$; son minimum est $f(\alpha)$.
- $g(\alpha) = 0$ donne $\alpha e^\alpha = 1$; comme $\alpha \neq 0$, $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$. Alors $f(\alpha) = (\alpha - 1) \times \frac{1}{\alpha} - \alpha + 3 = 1 - \frac{1}{\alpha} - \alpha + 3 = 4 - \alpha - \frac{1}{\alpha}$.
- $\alpha < 0,6$ et, comme $\alpha > 0,5$, $\frac{1}{\alpha} < 2$. Donc $\alpha + \frac{1}{\alpha} < 2,6$ et $f(\alpha) > 4 - 2,6 = 1,4 > 0$. Le minimum de f est strictement positif : $f(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$.