

Combinatoire et dénombrement

De combien de façons peut-on cocher 5 numéros parmi 49 au Loto ? Près de deux millions... et on va les compter sans en écrire une seule !

Ce que tu vas savoir faire

- Utiliser les principes additif et multiplicatif, et un arbre, pour compter
- Dénombrer des k -uplets, des k -uplets d'éléments distincts et des permutations
- Dénombrer des parties et des combinaisons, calculer $\binom{n}{k}$
- Démontrer et utiliser la symétrie, la relation de Pascal et $\sum \binom{n}{k} = 2^n$
- Choisir le bon modèle (ordre ? répétitions ?) pour calculer une probabilité

À revoir avant de commencer

- Vocabulaire des ensembles : élément, appartenance, intersection, réunion
- Arbres de probabilités (1re)
- Probabilités en situation d'équiprobabilité
- Raisonnement par récurrence (fiche 1)

1 Le cours

Pourquoi apprendre à compter ?

Pour calculer une probabilité en situation d'équiprobabilité, on divise le nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles. Mais combien y a-t-il de mains de 5 cartes dans un jeu de 32 ? De codes à 4 chiffres ? Impossible de les écrire un par un : il faut des **méthodes de dénombrement**. Elles reposent toutes sur deux idées simples : le principe **additif** (« ou ») et le principe **multiplicatif** (« et puis »).

1. Cardinal et principe additif

Définition et propriété – Cardinal, principe additif

Le **cardinal** d'un ensemble fini E est son nombre d'éléments, noté $\text{card}(E)$. Par exemple $\text{card}(\{a; b; c; d\}) = 4$ et $\text{card}(\emptyset) = 0$.

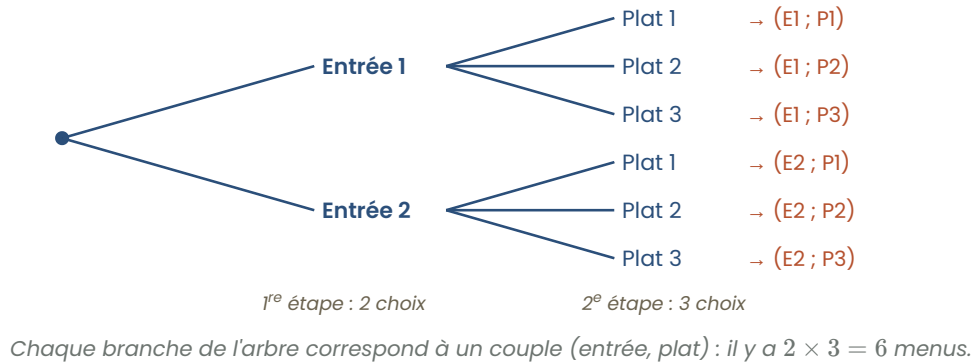
Principe additif : si A et B sont finis et **disjoints** ($A \cap B = \emptyset$), alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$. Cela s'étend à p ensembles deux à deux disjoints.

Remarque – Ensembles non disjoints

On compterait deux fois les éléments communs : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$. Exemple : 18 élèves font de l'anglais renforcé, 10 du latin et 4 les deux ; $18 + 10 - 4 = 24$ élèves font au moins l'un des deux.

2. Produit cartésien et principe multiplicatif

Au restaurant, on choisit une entrée parmi 2, **puis** un plat parmi 3. Un arbre montre que chaque entrée se combine avec chacun des plats :



Définition et propriété – Produit cartésien, principe multiplicatif

Le **produit cartésien** $E \times F$ est l'ensemble des **couples** $(x; y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$. Dans un couple, l'**ordre compte** : $(1; 2) \neq (2; 1)$. Plus généralement, $E_1 \times \dots \times E_k$ est l'ensemble des **k-uplets** $(x_1; \dots; x_k)$ avec $x_i \in E_i$, et $E^k = E \times \dots \times E$ (k fois).

Principe multiplicatif : $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$, et $\text{card}(E_1 \times \dots \times E_k) = \text{card}(E_1) \times \dots \times \text{card}(E_k)$.

En pratique : si un choix se fait en étapes successives, avec n_1 possibilités pour la 1^{re} étape, puis n_2 pour la 2^e (quel que soit le premier choix), etc., le nombre total de choix est $n_1 \times n_2 \times \dots$.

Exemple résolu – Plaques d'immatriculation

Une plaque française a la forme AB-123-CD : 2 lettres, 3 chiffres, 2 lettres. En supposant les 26 lettres et les 10 chiffres autorisés, combien de plaques ?

Solution

Sept choix successifs : $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 = 26^4 \times 10^3 = 456\,976\,000$ plaques. (En réalité certaines lettres sont interdites : le vrai nombre est un peu plus faible.)

3. Les k -uplets (tirages ordonnés avec répétition)

Propriété – Nombre de k -uplets

Soit E un ensemble à n éléments et $k \geq 1$. Le nombre de k -uplets d'éléments de E est $\text{card}(E^k) = n^k$.

En effet : n choix pour la 1^{re} place, n pour la 2^e, ..., n pour la k -ième. Ils modélisent les **tirages successifs avec remise** : l'ordre compte et un élément peut revenir.

Exemple résolu – Codes, mots, dés

Combien de codes de carte bancaire à 4 chiffres ? De « mots » de 5 lettres (avec ou sans sens) ? De résultats (dans l'ordre) pour 3 lancers d'un dé ?

Solution

Code : 4-uplet de $\{0; \dots; 9\}$, soit $10^4 = 10\,000$. Mot : 5-uplet de l'alphabet, soit $26^5 = 11\,881\,376$.
Dés : triplet de $\{1; \dots; 6\}$, soit $6^3 = 216$.

4. k -uplets d'éléments distincts et permutations

Sans répétition (tirages **sans remise**, dans l'ordre), le nombre de choix **diminue d'une unité à chaque étape**. Pour un podium (or, argent, bronze) parmi 10 coureurs : $10 \times 9 \times 8 = 720$ podiums.

Définition – Factorielle

Pour $n \geq 1$, $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ (« factorielle n »). Par convention, $0! = 1$. On a $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

$2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $10! = 3\,628\,800$: ça grandit très vite !

Propriété – k -uplets distincts, permutations

Soit E un ensemble à n éléments et $1 \leq k \leq n$. Le nombre de k -uplets d'éléments **distincts** de E est :

$$n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k \text{ facteurs}).$$

Une **permutation** de E est un n -uplet d'éléments distincts : une façon de ranger **tous** les éléments de E dans un ordre. Il y en a $n!$.

Exemple résolu – Anagrammes et bureau

- Combien d'anagrammes (avec ou sans sens) du mot MATHS ?
- Une association de 15 membres élit un président, un trésorier et un secrétaire (trois personnes différentes). Combien de bureaux possibles ?

Solution

- Les 5 lettres sont distinctes ; une anagramme est une permutation de ces lettres : $5! = 120$.
- Les rôles sont différents, donc l'**ordre compte**, et personne n'a deux rôles : ce sont des triplets d'éléments distincts parmi 15. Il y en a $15 \times 14 \times 13 = \frac{15!}{12!} = 2\,730$.

5. Parties d'un ensemble et combinaisons

Définition – Partie d'un ensemble

Une **partie** (ou sous-ensemble) de E est un ensemble A dont tous les éléments sont dans E ; on note $A \subset E$. $\emptyset$ et E sont des parties de E . Dans une partie, **pas d'ordre** ni de répétition : $\{a; b\} = \{b; a\}$.

Exemple : les parties de $\{a; b; c\}$ sont $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a; b\}, \{a; c\}, \{b; c\}, \{a; b; c\}$: il y en a $8 = 2^3$.

Théorème – Nombre de parties

Un ensemble à n éléments possède 2^n parties.

Démonstration AU PROGRAMME

Notons $E = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$. À chaque partie A de E , on associe le n -uplet $(\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n)$ où $\varepsilon_i = 1$ si $x_i \in A$ et $\varepsilon_i = 0$ sinon. Par exemple, pour $n = 3$, la partie $\{x_1; x_3\}$ est codée par $(1; 0; 1)$ et $\emptyset$ par $(0; 0; 0)$.

Ce codage marche dans les deux sens : chaque partie a un seul code, et chaque n -uplet de $\{0; 1\}$ code une seule partie (celle des x_i tels que $\varepsilon_i = 1$). Il y a donc autant de parties de E que de n -uplets de $\{0; 1\}$, c'est-à-dire 2^n .

Définition – Combinaison, coefficient binomial

Soit E un ensemble à n éléments et $0 \leq k \leq n$. Une **combinaison de k éléments** de E est une partie de E à k éléments. Leur nombre se note $\binom{n}{k}$ et se lit « **k parmi n** » (calculatrice : touche **nCr** ou **Combinaison**).

Théorème – Expression de $\binom{n}{k}$

Pour tous entiers $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k!}.$$

Démonstration AU PROGRAMME

Pour $k = 0$, la seule partie à 0 élément est $\emptyset$, donc $\binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{0!n!}$. Soit $1 \leq k \leq n$. On compte de **deux façons** les k -uplets d'éléments distincts de E :

- **directement** : il y en a $\frac{n!}{(n-k)!}$ (paragraphe 4) ;
- **en deux étapes** : on choisit d'abord les k éléments sans ordre, c'est-à-dire une combinaison $\binom{n}{k}$ (choix), **puis** on les range dans un ordre, c'est-à-dire une permutation de ces k éléments ($k!$ choix). Principe multiplicatif : il y en a $\binom{n}{k} \times k!$.

Donc $\binom{n}{k} \times k! = \frac{n!}{(n-k)!}$, d'où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Valeurs à connaître

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ (seules parties : $\emptyset$ et E) ; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ (les paires). Ainsi $\binom{10}{2} = 45$ est le nombre de poignées de main échangées par 10 personnes qui se saluent toutes une fois.

Exemple résolu – Loto et jeu de cartes

1. Au Loto, on coche 5 numéros parmi 49 (sans ordre). Combien de façons de le faire ?
2. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes (dont 4 as). Combien de mains possibles ? Combien contiennent exactement 2 as ? Au moins un as ?

Solution

1. Une grille est une partie à 5 éléments de $\{1; \dots; 49\}$: $\binom{49}{5} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1\,906\,884$. Au vrai Loto, on choisit en plus un numéro Chance parmi 10 : principe multiplicatif, $1\,906\,884 \times 10 = 19\,068\,840$ grilles.

2. Tirage **simultané** : pas d'ordre, pas de répétition. Nombre de mains : $\binom{32}{5} = 201\,376$.

Exactement 2 as : 2 as parmi 4 et 3 cartes parmi les 28 autres : $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 6 \times 3\,276 = 19\,656$.

Au moins un as : on passe par le **contraire** « aucun as » (5 cartes parmi 28) : $\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 201\,376 - 98\,280 = 103\,096$.

6. Propriétés des coefficients binomiaux

Propriété – Symétrie

Pour $0 \leq k \leq n$: $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

Choisir les k éléments que l'on **garde** revient à choisir les $n - k$ que l'on **laisse**. Ex. : $\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = 190$.

Théorème – Relation de Pascal

Pour $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n - 1$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Démonstration par dénombrement AU PROGRAMME

Soit E un ensemble à $n + 1$ éléments et a un élément fixé de E . On compte les parties de E à $k + 1$ éléments (il y en a $\binom{n+1}{k+1}$) en les séparant en deux groupes **disjoints** :

- celles qui **contiennent** a : il reste à choisir leurs k autres éléments parmi les n éléments différents de a , soit $\binom{n}{k}$ parties ;
- celles qui **ne contiennent pas** a : leurs $k + 1$ éléments sont choisis parmi les n autres, soit $\binom{n}{k+1}$ parties.

Par le principe additif : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Démonstration par le calcul AU PROGRAMME

On réduit au même dénominateur $(k+1)!(n-k)!$ grâce à $(k+1)! = (k+1) \times k!$ et $(n-k)! = (n-k) \times (n-k-1)!$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

La relation de Pascal permet de calculer les coefficients de proche en proche dans le **triangle de Pascal** : chaque nombre est la somme de celui qui est juste au-dessus et de celui qui est au-dessus à gauche.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	somme
0	1							1
1	1	1						2
2	1	2	1					4
3	1	3	3	1				8
4	1	4	6	4	1			16
5	1	5	10	10	5	1		32
6	1	6	15	20	15	6	1	64

Surligné : $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10 = \binom{5}{3}$.

Théorème – Somme d'une ligne

Pour tout entier $n \geq 0$: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Démonstration AU PROGRAMME

Soit E à n éléments. On range ses parties selon leur nombre d'éléments k , avec $0 \leq k \leq n$. Ces $n+1$ groupes sont disjoints et le groupe « k éléments » contient $\binom{n}{k}$ parties. Par le principe additif, il y a $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ parties en tout. Or il y en a 2^n . D'où l'égalité.

7. Choisir le bon modèle

Méthode – Deux questions à se poser

1. L'ordre compte-t-il ? (Rôles différents, places numérotées, tirages successifs → oui. Groupe, main de cartes, tirage simultané → non.) **2. Les répétitions sont-elles possibles ?** (Avec remise → oui ; sans remise → non.)

	Répétitions possibles	Pas de répétition
Ordre important	k -uplets : n^k	k -uplets distincts : $\frac{n!}{(n-k)!}$ (permutations si $k = n : n!$)
Pas d'ordre	<i>hors programme</i>	combinaisons : $\binom{n}{k}$

Et toujours : « **et** » (étapes successives) → on **multiplie** ; « **ou** » (cas disjoints) → on **ajoute** ; « **au moins un** » → on passe souvent par le **contraire**. Pour une probabilité : $P = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$, en comptant les deux avec le **même modèle**.

2 Les pièges à éviter

Attention – Les erreurs classiques

- **Utiliser $\binom{n}{k}$ quand l'ordre compte** (ou l'inverse). Élire un président et un trésorier parmi 10 : $10 \times 9 = 90$ (ordre) ; choisir 2 délégués parmi 10 : $\binom{10}{2} = 45$ (pas d'ordre). Il y a $2! = 2$ fois plus de cas ordonnés.
- **Additionner au lieu de multiplier** (et réciproquement) : « une entrée **et** un plat » se multiplie ; « une entrée **ou** un dessert » (cas disjoints) s'additionne.
- **Compter « au moins un » directement** : « un as, puis 4 cartes quelconques », soit $4 \times \binom{31}{4}$, compte plusieurs fois les mains à plusieurs as. Passez par le contraire.
- **Oublier que $0! = 1$** : $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$ (pas de « division par zéro »).
- **Confondre n^k et k^n** : 4 chiffres parmi 10 avec répétition, c'est 10^4 (nombre de choix **puissance** nombre de places), pas 4^{10} .
- **Mal simplifier les factorielles** : $\frac{10!}{8!} = 10 \times 9 = 90$ et non $\frac{10}{8}$; et $(2n)! \neq 2 \times n!$.

3 Avec Python

Triangle de Pascal. Pour n donné, on génère la liste des coefficients $\binom{n}{k}$ ligne après ligne grâce à la relation de Pascal.

```
def ligne_suivante(ligne):  
    """Calcule la ligne n+1 du triangle à partir de la ligne n (relation de Pascal)"""  
    nouvelle = [1] # C(n+1, 0) = 1  
    for k in range(len(ligne) - 1):  
        nouvelle.append(ligne[k] + ligne[k + 1]) # C(n,k) + C(n,k+1) = C(n+1,k+1)  
    nouvelle.append(1) # C(n+1, n+1) = 1  
    return nouvelle  
  
def pascal(n):  
    """Affiche les lignes 0 à n du triangle de Pascal"""  
    ligne = [1] # ligne 0 : C(0, 0) = 1  
    print(ligne)  
    for i in range(n):  
        ligne = ligne_suivante(ligne)  
        print(ligne)  
  
pascal(6)  
  
# Affichage :  
# [1]  
# [1, 1]  
# [1, 2, 1]  
# [1, 3, 3, 1]  
# [1, 4, 6, 4, 1]  
# [1, 5, 10, 10, 5, 1]  
# [1, 6, 15, 20, 15, 6, 1]
```

Python

Génération de listes. Toutes les permutations d'une liste (on choisit le premier élément, puis on permute les autres) et toutes les parties à 2 éléments (on impose $i < j$ pour ne pas compter deux fois la même paire).

```
def permutations(L):
    """Renvoie la liste de toutes les permutations de la liste L"""
    if len(L) <= 1:
        return [L]
    resultat = []
    for i in range(len(L)):
        premier = L[i]                                # on choisit le premier élément...
        reste = L[:i] + L[i + 1:]                     # ... puis on permute les autres
        for p in permutations(reste):
            resultat.append([premier] + p)
    return resultat

def paires(E):
    """Renvoie la liste des parties à 2 éléments de la liste E"""
    resultat = []
    for i in range(len(E)):
        for j in range(i + 1, len(E)):                # j > i : chaque paire une seule fois
            resultat.append([E[i], E[j]])
    return resultat

P = permutations(['A', 'B', 'C'])
print(P, len(P))
print(paires(['a', 'b', 'c', 'd']))

# Affichage :
# [['A', 'B', 'C'], ['A', 'C', 'B'], ['B', 'A', 'C'], ['B', 'C', 'A'], ['C', 'A', 'B'], ['C',
# 'B', 'A']] 6
# [['a', 'b'], ['a', 'c'], ['a', 'd'], ['b', 'c'], ['b', 'd'], ['c', 'd']]
```

On retrouve $3! = 6$ permutations et $\binom{4}{2} = 6$ paires. Le module math fournit aussi `factorial(n)` et `comb(n, k)`.

4 Exercices

Exercice 1 ★

Le code d'entrée d'un immeuble est formé d'une lettre parmi A, B, C suivie de 4 chiffres (de 0 à 9).

1. Combien de codes différents existe-t-il ?
2. Combien de codes ont leurs 4 chiffres tous différents ?

Exercice 2 ★

Calculer sans calculatrice : $6!$, $\frac{7!}{5!}$, $\binom{8}{3}$, $\binom{8}{5}$, $\binom{100}{99}$. Que remarque-t-on pour $\binom{8}{3}$ et $\binom{8}{5}$?

Exercice 3 ★★

Un club compte 12 membres : 7 filles et 5 garçons.

1. On élit un président, un vice-président et un secrétaire (trois personnes distinctes). Combien de possibilités ?
2. On désigne une délégation de 3 membres. Combien de délégations possibles ?
3. Combien de délégations comportent exactement 2 filles ? Au moins une fille ?

Exercice 4 ★★

On cherche le nombre d'anagrammes du mot ANANAS (avec ou sans sens).

1. Expliquer pourquoi la réponse n'est pas 6!.
2. En choisissant d'abord les places des trois A, puis celles des deux N, calculer ce nombre.

Exercice 5 ★★★

Soit $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$ deux entiers.

1. Démontrer par le calcul que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
2. Retrouver ce résultat par un dénombrement : dans un groupe de n personnes, on forme un comité de k personnes dont l'une est présidente.
3. En déduire que $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$. Vérifier pour $n = 4$.

Exercice 6 ★★★ – type bac

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 4 rouges et 6 noires.

Partie A. On tire **simultanément** 3 boules.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 boules rouges, puis celle d'obtenir au moins une boule rouge.

Partie B. On tire maintenant **successivement et avec remise** 3 boules, en notant les boules obtenues dans l'ordre.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles (les 10 boules étant considérées comme distinctes) ?
2. Combien de tirages donnent une rouge aux 1^{er} et 2^e tirages et une noire au 3^e ? En déduire le nombre de tirages comportant exactement 2 rouges, puis la probabilité correspondante.
3. Comparer avec la partie A. Quelle loi de probabilité retrouve-t-on ici ?

5 Teste-toi (QCM)

- 1 Le nombre de codes à 4 chiffres (de 0 à 9, répétitions autorisées) est :
A. 40 B. 5 040 C. 10 000 D. 210
- 2 $\binom{6}{2}$ est égal à :
A. 12 B. 15 C. 30 D. 36
- 3 De combien de façons peut-on asseoir 5 personnes sur 5 chaises alignées ?
A. 25 B. 120 C. 3 125 D. 5
- 4 Un ensemble à 6 éléments possède :
A. 12 parties B. 36 parties C. 64 parties D. 720 parties
- 5 $\binom{10}{3} + \binom{10}{4}$ est égal à :
A. $\binom{11}{4}$ B. $\binom{20}{7}$ C. $\binom{11}{3}$ D. $\binom{10}{7}$

6 On tire simultanément 2 boules dans une urne qui en contient 5. Le nombre de tirages est :

A. 10

B. 20

C. 25

D. 32

L'essentiel à retenir

- **Additif** : $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B$.
- **Multiplicatif** : $\text{card}(E \times F) = \text{card } E \times \text{card } F$.
- **k-uplets** (ordre, répétitions) : n^k .
- **k-uplets distincts** (ordre, sans répétition) : $\frac{n!}{(n-k)!}$.
- **Permutations** : $n!$, avec $0! = 1$.
- **Parties** d'un ensemble à n éléments : 2^n .
- **Combinaisons** (ni ordre ni répétition) : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- **Symétrie** : $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.
- **Pascal** : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
- **Somme d'une ligne** : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.
- « Au moins un » : penser au **contraire**.

6 Corrigés

QCM

1. C (10^4) · 2. B ($\frac{6 \times 5}{2} = 15$) · 3. B ($5! = 120$) · 4. C ($2^6 = 64$) · 5. A (Pascal) · 6. A ($\binom{5}{2} = 10$)

Exercice 1

- Principe multiplicatif : 3 choix pour la lettre, puis 10 pour chacun des 4 chiffres : $3 \times 10^4 = 30\,000$ codes.
- Chiffres distincts (4-uplet) : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$; avec la lettre : $3 \times 5\,040 = 15\,120$ codes.

Exercice 2

$6! = 720$; $\frac{7!}{5!} = 7 \times 6 = 42$; $\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$; $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = 56$; $\binom{100}{99} = \binom{100}{1} = 100$. On retrouve la symétrie : $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$ car $5 = 8 - 3$.

Exercice 3

- Rôles distincts : l'ordre compte, sans répétition : $12 \times 11 \times 10 = 1\,320$.
- Pas d'ordre, sans répétition : $\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220$ délégations.
- Exactement 2 filles : 2 filles parmi 7 et 1 garçon parmi 5 : $\binom{7}{2} \times \binom{5}{1} = 21 \times 5 = 105$. Au moins une fille : contraire de « 3 garçons » : $220 - \binom{5}{3} = 220 - 10 = 210$.

Exercice 4

- $6! = 720$ compte les rangements de 6 lettres **distinctes** ; or échanger deux A ne change pas le mot.
- On choisit les 3 places des A parmi 6 : $\binom{6}{3} = 20$; puis les 2 places des N parmi les 3 restantes : $\binom{3}{2} = 3$; la place du S est alors imposée. Total : $20 \times 3 = 60$ anagrammes. (Vérification : $\frac{6!}{3!2!1!} = \frac{720}{12} = 60$.)

Exercice 5

- $k \binom{n}{k} = \frac{k \times n!}{k! (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!}$ car $k! = k \times (k-1)!$; et $n \binom{n-1}{k-1} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!}$ car $(n-1) - (k-1) = n - k$. Les deux sont égaux.
- On compte les couples (comité, président) de deux façons : **comité d'abord**, puis président parmi ses k membres : $k \binom{n}{k}$; **président d'abord** (n choix), puis les $k-1$ autres parmi les $n-1$ restants : $n \binom{n-1}{k-1}$.
- $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n 2^{n-1}$ ($j = k-1$, puis somme d'une ligne). Pour $n = 4$: $1 \times 4 + 2 \times 6 + 3 \times 4 + 4 \times 1 = 32 = 4 \times 2^3$.

Exercice 6

- A.1.** Parties à 3 éléments parmi 10 : $\binom{10}{3} = 120$ tirages, équiprobables.
- A.2.** Exactement 2 rouges : $\binom{4}{2} \times \binom{6}{1} = 6 \times 6 = 36$, donc $P = \frac{36}{120} = \frac{3}{10} = 0,3$. Au moins une rouge : $P = 1 - P(3 \text{ noires}) = 1 - \frac{20}{120} = \frac{5}{6} \approx 0,833$, car $\binom{6}{3} = 20$.
- B.1.** Triplets de boules (avec répétition) : $10^3 = 1\,000$ tirages, équiprobables.
- B.2.** Rouge, rouge, noire : $4 \times 4 \times 6 = 96$ tirages. Il y a $\binom{3}{2} = 3$ façons de placer les 2 rouges parmi les 3 positions, d'où $3 \times 96 = 288$ tirages et $P = \frac{288}{1\,000} = 0,288$.
- B.3.** Résultats proches mais différents (0,3 sans remise, 0,288 avec). Avec remise, les tirages sont indépendants et $P = \binom{3}{2} \times 0,4^2 \times 0,6$: c'est la **loi binomiale** $\mathcal{B}(3; 0,4)$ (fiche 14).