

Sommes de variables aléatoires, concentration et loi des grands nombres

Lance une pièce des milliers de fois : la fréquence de Pile finit toujours par se rapprocher de $\frac{1}{2}$. Simple coïncidence ? Non : c'est un théorème, et tu vas le démontrer !

Ce que tu vas savoir faire

- Calculer l'espérance et la variance de $aX + b$ et d'une somme de variables aléatoires
- Écrire une variable comme somme de variables plus simples (loi binomiale = somme de lois de Bernoulli)
- Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de la somme S_n et de la moyenne M_n d'un échantillon
- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et l'inégalité de concentration
- Déterminer une taille d'échantillon suffisante pour une précision et un risque donnés
- Comprendre et interpréter la loi faible des grands nombres

À revoir avant de commencer

- Variable aléatoire, loi, espérance, variance, écart-type (1re)
- Loi de Bernoulli et loi binomiale (fiche 14)
- Symbole $\sum$ et manipulation d'inégalités
- Valeur absolue : $|x - a| \geq \delta$ signifie que x est à distance au moins δ de a
- Limites de suites, théorème des gendarmes (fiche 2)

1 Le cours

L'idée : additionner des hasards... qui se compensent

Un seul lancer de dé peut donner 1 comme 6 : c'est très variable. Mais si tu fais la **moyenne** de 100 lancers, les « trop grands » et les « trop petits » se compensent, et tu obtiens presque toujours un nombre proche de 3,5. Ce chapitre donne les outils pour **mesurer** ce phénomène : l'espérance et la variance d'une somme, puis deux inégalités qui contrôlent la probabilité de s'écarter de la moyenne.

Rappels de 1re

Si X prend les valeurs $x_1, \dots, x_r$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_r$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^r p_i x_i, \quad V(X) = \sum_{i=1}^r p_i (x_i - E(X))^2 = E(X^2) - E(X)^2, \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

$E(X)$ est la valeur moyenne ; $V(X)$ et $\sigma(X)$ mesurent la **dispersion** autour de cette moyenne.

Transformation affine : $aX + b$

Propriété – Espérance et variance de $aX + b$

Pour tous réels a et b :

$$E(aX + b) = aE(X) + b, \quad V(aX + b) = a^2 V(X), \quad \sigma(aX + b) = |a| \sigma(X).$$

Preuve. $E(aX + b) = \sum p_i(ax_i + b) = a \sum p_i x_i + b \sum p_i = aE(X) + b$ car $\sum p_i = 1$. Ensuite, $(ax_i + b) - E(aX + b) = a(x_i - E(X))$; en élevant au carré, chaque écart est multiplié par a^2 , donc $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Intuition. Ajouter b **décale** toutes les valeurs : la moyenne bouge, mais pas la dispersion (d'où l'absence de b dans la variance). Multiplier par a **étire** les écarts d'un facteur $|a|$, donc la variance (un carré) d'un facteur a^2 .

Exemple résolu – Un jeu à gain affine

Le nombre X de cibles touchées par un joueur suit la loi : $P(X = 0) = 0,5$, $P(X = 1) = 0,3$, $P(X = 2) = 0,2$. Il paie 4 € pour jouer et reçoit 10 € par cible touchée. Calculer l'espérance et l'écart-type de son gain G .

Solution

$$E(X) = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,2 = 0,7; \quad E(X^2) = 0 + 0,3 + 4 \times 0,2 = 1,1; \quad V(X) = 1,1 - 0,7^2 = 0,61.$$

Le gain est $G = 10X - 4$. Donc $E(G) = 10 \times 0,7 - 4 = 3$ €, $V(G) = 10^2 \times 0,61 = 61$ et $\sigma(G) = \sqrt{61} \approx 7,81$ €.

Somme de deux variables aléatoires

Définition – Somme, indépendance

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω , la variable $X + Y$ associe à chaque issue ω le nombre $X(\omega) + Y(\omega)$.

X et Y sont **indépendantes** lorsque, pour toutes valeurs x et y : $P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(X = x) \times P(Y = y)$. C'est le cas lorsque X et Y sont liées à des épreuves indépendantes (fiche 14).

Théorème – Linéarité de l'espérance, variance d'une somme (admis)

- Pour toutes variables X et Y et tous réels a, b : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
- Si X et Y sont **indépendantes** : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ et, plus généralement, $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$.

Attention : la linéarité de l'espérance est **toujours** vraie. En revanche, l'additivité de la variance demande l'indépendance. Contre-exemple : avec $Y = X$, on a $V(X + X) = V(2X) = 4V(X)$, et non $2V(X)$. Remarque aussi que, pour X et Y indépendantes, $V(X - Y) = V(X) + (-1)^2V(Y) = V(X) + V(Y)$: les variances **s'ajoutent** même pour une différence.

Exemple résolu – Vérifier les formules sur une loi

On lance une pièce équilibrée ($X = 1$ si Pile, 0 sinon) puis un dé équilibré à 3 faces numérotées 1, 2, 3 (résultat Y). Déterminer la loi de $S = X + Y$, puis vérifier que $E(S) = E(X) + E(Y)$ et $V(S) = V(X) + V(Y)$.

Solution

Les 6 couples $(x; y)$ sont équiprobables, de probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. On additionne :

s	1	2	3	4
$P(S = s)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$E(S) = \frac{1 + 4 + 6 + 4}{6} = \frac{15}{6} = 2,5, \text{ et } E(X) + E(Y) = 0,5 + 2 = 2,5. \checkmark$$

$$E(S^2) = \frac{1 + 8 + 18 + 16}{6} = \frac{43}{6}, \text{ donc } V(S) = \frac{43}{6} - 2,5^2 = \frac{11}{12}. \text{ Or } V(X) = 0,5 \times 0,5 = \frac{1}{4}$$

$$\text{(Bernoulli) et } V(Y) = \frac{1 + 4 + 9}{3} - 2^2 = \frac{2}{3} : \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}. \checkmark \text{ (Les deux épreuves sont indépendantes.)}$$

Application : espérance et variance de la loi binomiale

Démonstration – $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$ AU PROGRAMME

Soit X de loi $\mathcal{B}(n, p)$: X compte les succès dans un schéma de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p . Pour $i = 1, \dots, n$, on note X_i la variable qui vaut 1 si la i -ième épreuve est un succès et 0 sinon. Chaque X_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, donc $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1 - p)$.

Compter les succès revient à additionner les 1 : $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Espérance (linéarité, sans hypothèse) : $E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = \underbrace{p + \dots + p}_{n \text{ termes}} = np$.

Variance : les épreuves sont indépendantes, donc les X_i aussi, et les variances s'additionnent : $V(X) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = np(1 - p)$.

Échantillon d'une loi : somme et moyenne

Définition – Échantillon

Un **échantillon de taille** n d'une loi de probabilité est une liste $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variables aléatoires **indépendantes** suivant **toutes cette loi**. On lui associe :

$$\text{la somme } S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad \text{et la moyenne } M_n = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

Exemple : les résultats de n lancers d'un même dé forment un échantillon de taille n de la loi uniforme sur $\{1; \dots; 6\}$.

Propriété – Espérance et variance de S_n et de M_n

Si X suit la loi de l'échantillon :

	Espérance	Variance	Écart-type
Somme S_n	$E(S_n) = n E(X)$	$V(S_n) = n V(X)$	$\sigma(S_n) = \sqrt{n} \sigma(X)$
Moyenne M_n	$E(M_n) = E(X)$	$V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$	$\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Preuve. Linéarité : $E(S_n) = nE(X)$; indépendance : $V(S_n) = nV(X)$. Puis $M_n = \frac{1}{n}S_n$: $E(M_n) = \frac{1}{n}E(S_n) = E(X)$ et $V(M_n) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{V(X)}{n}$.

En une phrase : la moyenne d'un échantillon a **la même espérance** que X , mais un écart-type **divisé par $\sqrt{n}$** : plus l'échantillon est grand, plus M_n est **concentrée** autour de $E(X)$. Pour diviser l'écart-type par 10, il faut un échantillon 100 fois plus grand.

Exemple résolu – Des paquets de café

Une machine remplit des paquets ; la masse (en g) d'un paquet est une variable d'espérance 500 et d'écart-type 4. Un carton contient 25 paquets, dont les masses sont indépendantes. Calculer l'espérance et l'écart-type de la masse totale S du contenu du carton, puis de la masse moyenne M d'un paquet du carton.

Solution

Les 25 masses forment un échantillon de taille 25. $E(S) = 25 \times 500 = 12\,500$ g ; $V(S) = 25 \times 4^2 = 400$, donc $\sigma(S) = 20$ g.

$E(M) = 500$ g et $\sigma(M) = \frac{4}{\sqrt{25}} = 0,8$ g. **Attention :** $\sigma(S) = 20 \neq 25 \times 4 = 100$: ce sont les **variances** qui s'additionnent, pas les écarts-types.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

La variance mesure la dispersion... mais peut-on en déduire une **probabilité** ? Oui : une variable de petite variance a peu de chances de tomber loin de son espérance.

Théorème – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (admis)

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V . Pour tout réel $\delta > 0$:

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}.$$

De façon équivalente (événement contraire) : $P(|X - \mu| < \delta) \geq 1 - \frac{V}{\delta^2}$.

En écarts-types. Avec $\delta = k\sigma$ (où $\sigma = \sqrt{V}$ et $k > 0$) : $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$. Quelle que soit la loi, la probabilité de s'écarter de la moyenne d'au moins 2σ est au plus $\frac{1}{4}$, d'au moins 3σ au plus $\frac{1}{9}$. Ce majorant est valable pour **toutes** les lois, il est donc souvent **grossier**. Si $\delta^2 \leq V$, il est même supérieur ou égal à 1 et n'apporte rien.

Méthode – Utiliser Bienaymé-Tchebychev

1. Calculer $\mu = E(X)$ et $V = V(X)$.
2. Réécrire l'événement avec une valeur absolue centrée en μ : « $X \leq \mu - \delta$ ou $X \geq \mu + \delta$ » $\iff |X - \mu| \geq \delta$; « $\mu - \delta < X < \mu + \delta$ » $\iff |X - \mu| < \delta$.
3. Appliquer l'inégalité (ou sa forme contraire).

Exemple résolu – 100 lancers d'une pièce

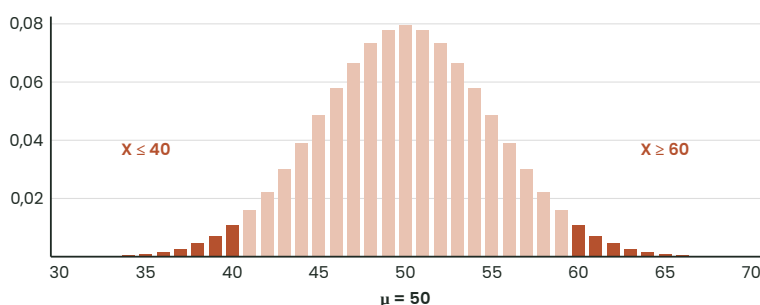
On lance 100 fois une pièce équilibrée ; X est le nombre de Pile. Majorer $P(X \leq 40 \text{ ou } X \geq 60)$, puis minorer $P(40 < X < 60)$.

Solution

X suit $\mathcal{B}(100; 0,5)$: $\mu = 50$ et $V = 100 \times 0,5 \times 0,5 = 25$. L'événement « $X \leq 40$ ou $X \geq 60$ » s'écrit $|X - 50| \geq 10$. Par Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{25}{10^2} = 0,25, \quad \text{donc} \quad P(40 < X < 60) = 1 - P(|X - 50| \geq 10) \geq 0,75.$$

La calculatrice donne en réalité $P(|X - 50| \geq 10) \approx 0,057$: l'inégalité est vraie, mais peu précise.



Loi $\mathcal{B}(100; 0,5)$: en foncé, l'événement « $|X - 50| \geq 10$ ». Sa probabilité vaut environ 0,057, bien moins que le majorant 0,25 donné par Bienaymé-Tchebychev.

L'inégalité de concentration

Appliquons Bienaymé-Tchebychev à la **moyenne** M_n d'un échantillon : sa variance $\frac{V}{n}$ devient toute petite quand n grandit.

Théorème – Inégalité de concentration

Soit M_n la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance V . Pour tout réel $\delta > 0$:

$$P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}.$$

Démonstration AU PROGRAMME

D'après la propriété sur les échantillons, $E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \frac{V}{n}$. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable M_n :

$$P(|M_n - E(M_n)| \geq \delta) \leq \frac{V(M_n)}{\delta^2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V/n}{\delta^2} = \frac{V}{n\delta^2}.$$

Méthode – Trouver une taille d'échantillon suffisante

On veut que la probabilité d'un écart d'au moins δ soit au plus α (le « risque »). Il **suffit** que :

$$\frac{V}{n\delta^2} \leq \alpha \iff n \geq \frac{V}{\alpha\delta^2}.$$

Ce n est **suffisant**, pas forcément le plus petit possible (le majorant est grossier).

Exemple résolu – Combien de lancers ?

On lance n fois une pièce équilibrée ; F_n est la fréquence de Pile. Déterminer une valeur de n garantissant que $P(|F_n - 0,5| \geq 0,05) \leq 0,05$.

Solution

Avec $X_i = 1$ si le i -ième lancer donne Pile, 0 sinon, les X_i forment un échantillon de la loi $\mathcal{B}(0,5)$, d'espérance $\mu = 0,5$ et de variance $V = 0,5 \times 0,5 = 0,25$. La fréquence de Pile est la moyenne : $F_n = M_n$.

Il suffit que $\frac{0,25}{n \times 0,05^2} \leq 0,05$, soit $n \geq \frac{0,25}{0,05 \times 0,0025} = 2\,000$.

Avec au moins 2 000 lancers, la fréquence de Pile est dans $]0,45 ; 0,55[$ avec une probabilité d'au moins 95 %.

La loi (faible) des grands nombres

Théorème – Loi faible des grands nombres

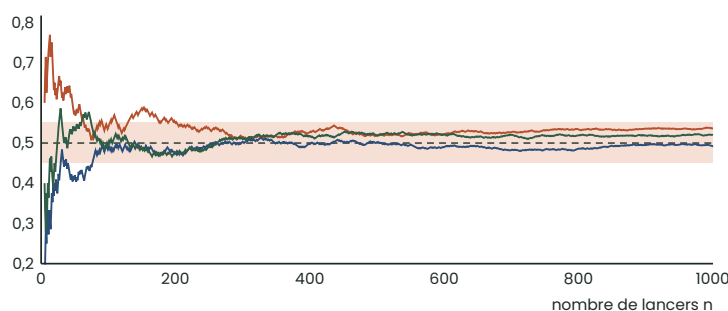
Soit M_n la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X d'espérance μ . Pour tout réel $\delta > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0.$$

Démonstration

Pour tout $n \geq 1$, une probabilité étant positive et d'après l'inégalité de concentration : $0 \leq P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V}{n\delta^2} = 0$ (V et δ sont fixés). Par le théorème des gendarmes, la limite vaut 0.

Interprétation. Aussi petite que soit la marge δ choisie, la probabilité que la moyenne de l'échantillon s'écarte de μ de plus de δ devient aussi petite que l'on veut quand n augmente. En particulier, la **fréquence** d'un succès se rapproche de sa **probabilité** : c'est ce qui justifie qu'on estime une probabilité par une fréquence observée sur un grand nombre d'expériences, et qu'on utilise des simulations.



Trois séries simulées de 1 000 lancers d'une pièce équilibrée : la fréquence de Pile finit par rester dans la bande $[0,45 ; 0,55]$ autour de 0,5.

2 Les pièges à éviter

Attention – Les erreurs classiques

- **Écrire** $V(aX + b) = aV(X) + b$. Le bon résultat est $a^2V(X)$: la constante b disparaît et a est élevé au carré.
- **Additionner les variances sans vérifier l'indépendance.** $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ est toujours vrai ; $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ seulement si X et Y sont indépendantes.
- **Écrire** $V(X - Y) = V(X) - V(Y)$. Pour X, Y indépendantes, $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$ (une variance n'est jamais négative !).
- **Additionner les écarts-types.** $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \sigma(X)$, et non $n \sigma(X)$; de même $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.
- **Oublier le carré de δ** dans Bienaymé-Tchebychev : le majorant est $\frac{V}{\delta^2}$, pas $\frac{V}{\delta}$. Et l'inégalité porte sur un écart **centré en μ** : il faut d'abord écrire l'événement sous la forme $|X - \mu| \geq \delta$.
- **Croire que $n \geq \frac{V}{\alpha\delta^2}$ donne la plus petite taille possible.** C'est une taille **suffisante** ; la vraie valeur minimale est souvent bien plus petite.

3 Avec Python

On simule $N = 1\,000$ échantillons de n lancers d'un dé ($\mu = 3,5$, $V = \frac{35}{12}$) et on calcule la **fréquence des échantillons** dont la moyenne s'écarte de μ d'au moins $\delta = 0,5$. On la compare au majorant $\frac{V}{n\delta^2}$ de l'inégalité de concentration.

```

from random import randint, seed

def moyenne_echantillon(n):
    """Moyenne de n lancers d'un dé équilibré"""
    s = 0
    for i in range(n):
        s = s + randint(1, 6)
    return s / n

def frequence_ecarts(N, n, delta):
    """Proportion des N échantillons de taille n dont la moyenne
    s'écarte de mu = 3,5 d'au moins delta"""
    compteur = 0
    for j in range(N):
        if abs(moyenne_echantillon(n) - 3.5) >= delta:
            compteur = compteur + 1
    return compteur / N

seed(2026)                                # pour retrouver les mêmes tirages
V = 35 / 12                               # variance d'un lancer de dé
for n in [10, 50, 100, 500]:
    borne = V / (n * 0.5**2)              # majorant de l'inégalité de concentration
    print(n, frequence_ecarts(1000, n, 0.5), round(borne, 4))

# Affichage obtenu :
# 10 0.418 1.1667
# 50 0.036 0.2333
# 100 0.004 0.1167
# 500 0.0 0.0233

```

On observe les deux faits du cours : la fréquence des écarts diminue quand n augmente (loi des grands nombres), et elle reste toujours sous le majorant, souvent très en dessous (pour $n = 10$, le majorant dépasse 1 et n'apporte rien).

4 Exercices

Exercice 1 ★

La variable X suit la loi : $P(X = -1) = 0,2$, $P(X = 0) = 0,5$, $P(X = 2) = 0,3$.

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. En déduire l'espérance et la variance de $Y = 3X + 2$ et de $Z = -2X + 1$, puis l'écart-type de Z .

Exercice 2 ★

X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** telles que $E(X) = 3$, $V(X) = 2$, $E(Y) = -1$ et $V(Y) = 5$. Calculer l'espérance et la variance de $X + Y$, de $X - Y$ et de $2X - 3Y + 4$.

Exercice 3 ★★

Dans un café, le montant (en €) dépensé par un client est une variable d'espérance 4,50 et d'écart-type 1,20. Un jour, 150 clients passent, et leurs dépenses sont indépendantes. On note S la recette totale et M la dépense moyenne par client.

1. Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$ (arrondi au centime), puis $E(M)$ et $\sigma(M)$ (arrondi au centime).
2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $P(645 < S < 705) \geq 0,76$.

Exercice 4 ★★

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(400; 0,5)$.

1. Donner $E(X)$ et $V(X)$.
2. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que $P(180 < X < 220) \geq 0,75$.
3. La calculatrice donne $P(181 \leq X \leq 219) \approx 0,949$. Commenter.

Exercice 5 ★★★ – type bac

Sur un site web, chaque visiteur clique sur une publicité avec probabilité 0,08, indépendamment des autres. Pour n visiteurs, on note X_i la variable qui vaut 1 si le i -ième visiteur clique et 0 sinon, et

$F_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ la fréquence de clics.

1. Quelle est la loi de chaque X_i ? Donner $E(X_i)$ et $V(X_i)$.
2. Exprimer $E(F_n)$ et $V(F_n)$ en fonction de n .
3. On prend $n = 1\,000$. À l'aide de l'inégalité de concentration, majorer $P(|F_{1000} - 0,08| \geq 0,02)$. En déduire une minoration de la probabilité que la fréquence de clics soit strictement comprise entre 0,06 et 0,1.
4. Déterminer une taille n de l'échantillon de visiteurs suffisante pour que $P(|F_n - 0,08| \geq 0,01) \leq 0,05$.
5. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|F_n - 0,08| \geq 0,01)$? Interpréter.

5 Teste-toi (QCM)

- 1 Si $E(X) = 3$, alors $E(2X - 5)$ vaut :
A. 1
B. 6
C. -2
D. 11
- 2 Si $V(X) = 3$, alors $V(2X - 5)$ vaut :
A. 1
B. 6
C. 12
D. 7
- 3 X et Y sont indépendantes, avec $V(X) = 4$ et $V(Y) = 9$. Alors $V(X - Y)$ vaut :
A. -5
B. 5
C. 13
D. 1

6 Corrigés

Exercice 1

1. $E(X) = -1 \times 0,2 + 0 \times 0,5 + 2 \times 0,3 = 0,4$; $E(X^2) = 1 \times 0,2 + 0 + 4 \times 0,3 = 1,4$; $V(X) = 1,4 - 0,4^2 = 1,24$. 2. $E(Y) = 3 \times 0,4 + 2 = 3,2$ et $V(Y) = 9 \times 1,24 = 11,16$. $E(Z) = -2 \times 0,4 + 1 = 0,2$, $V(Z) = (-2)^2 \times 1,24 = 4,96$ et $\sigma(Z) = \sqrt{4,96} \approx 2,23$.

Exercice 2

$E(X + Y) = 3 + (-1) = 2$ et, par indépendance, $V(X + Y) = 2 + 5 = 7$. $E(X - Y) = 3 - (-1) = 4$ et $V(X - Y) = V(X) + (-1)^2 V(Y) = 7$.

$E(2X - 3Y + 4) = 2 \times 3 - 3 \times (-1) + 4 = 13$ et $V(2X - 3Y + 4) = 2^2 \times 2 + (-3)^2 \times 5 = 53$.

Exercice 3

1. Les 150 dépenses forment un échantillon de taille 150. $E(S) = 150 \times 4,5 = 675$ €; $V(S) = 150 \times 1,2^2 = 216$; $\sigma(S) = \sqrt{216} \approx 14,70$ €. $E(M) = 4,50$ € et $\sigma(M) = \frac{1,2}{\sqrt{150}} \approx 0,10$ €.

2. $645 < S < 705 \iff |S - 675| < 30$. Par Bienaymé-Tchebychev (forme contraire) : $P(|S - 675| < 30) \geq 1 - \frac{216}{30^2} = 1 - 0,24 = 0,76$.

Exercice 4

1. $E(X) = 400 \times 0,5 = 200$ et $V(X) = 400 \times 0,5 \times 0,5 = 100$.

2. $180 < X < 220 \iff |X - 200| < 20$, donc $P(180 < X < 220) \geq 1 - \frac{100}{20^2} = 1 - 0,25 = 0,75$.

3. Comme X est entière, $P(180 < X < 220) = P(181 \leq X \leq 219) \approx 0,949$. C'est bien $\geq 0,75$: la minoration, valable pour toutes les lois, est très grossière.

Exercice 5

1. Chaque X_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(0,08)$: $E(X_i) = 0,08$ et $V(X_i) = 0,08 \times 0,92 = 0,0736$. 2. $(X_1, \dots, X_n)$ est un échantillon de cette loi et F_n est sa moyenne : $E(F_n) = 0,08$ et $V(F_n) = \frac{0,0736}{n}$.

3. $P(|F_{1000} - 0,08| \geq 0,02) \leq \frac{0,0736}{1000 \times 0,02^2} = \frac{0,0736}{0,4} = 0,184$. Or « $0,06 < F_{1000} < 0,1$ » $\iff |F_{1000} - 0,08| < 0,02$, donc cette probabilité est au moins $1 - 0,184 = 0,816$.

4. Il suffit que $\frac{0,0736}{n \times 0,01^2} \leq 0,05$, soit $n \geq \frac{0,0736}{0,05 \times 0,0001} = 14\,720$: $n = 14\,720$ convient.

5. La limite vaut 0 (loi faible des grands nombres ; ou gendarmes, car la probabilité est comprise entre 0 et $\frac{736}{n}$) : sur un très grand nombre de visiteurs, la fréquence de clics est presque sûrement à moins de 0,01 de 0,08.

QCM

1. A ($2 \times 3 - 5$) · 2. C ($2^2 \times 3$) · 3. C ($4 + 9$: les variances s'ajoutent) · 4. B ($\frac{5}{\sqrt{100}}$) · 5. B ($\frac{4}{5^2}$) · 6. A (loi des grands nombres)