

# Le raisonnement par récurrence

Comment démontrer qu'une propriété est vraie pour une infinité d'entiers... sans les vérifier un par un ? Avec l'effet domino !

## Ce que tu vas savoir faire

- Rédiger une démonstration par récurrence complète (initialisation, hérédité, conclusion)
- Démontrer une formule explicite, une inégalité ou une propriété de monotonie d'une suite
- Démontrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée
- Connaître et démontrer l'inégalité de Bernoulli

## À revoir avant de commencer

- Suites arithmétiques et géométriques (1re)
- Sens de variation d'une suite
- Calcul littéral : développer, factoriser, manipuler des inégalités
- Suites définies par  $u_{n+1} = f(u_n)$

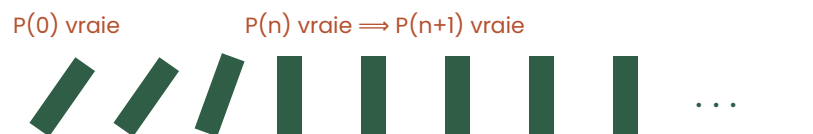
## 1 Le cours

### L'idée : l'effet domino

Imagine une rangée infinie de dominos. Pour être sûr qu'ils tombent **tous**, il suffit de vérifier deux choses :

- le **premier** domino tombe ;
- si **un** domino tombe (n'importe lequel), alors il fait tomber le **suivant**.

Le raisonnement par récurrence, c'est exactement cela, avec des propriétés mathématiques à la place des dominos.



L'initialisation fait tomber le premier domino, l'hérédité assure que chacun entraîne le suivant.

### Théorème – Principe de récurrence

Soit  $P(n)$  une propriété qui dépend d'un entier naturel  $n$ , et  $n_0$  un entier naturel. Si :

- **Initialisation** :  $P(n_0)$  est vraie ;
- **Hérédité** : pour tout entier  $n \geq n_0$ , si  $P(n)$  est vraie, alors  $P(n + 1)$  est vraie ;

alors  $P(n)$  est vraie **pour tout entier**  $n \geq n_0$ .

## Vocabulaire

Dans l'hérédité, la supposition «  $P(n)$  est vraie » s'appelle l'**hypothèse de récurrence** (souvent notée HR). On ne sait pas qu'elle est vraie : on **suppose** qu'elle l'est pour un certain  $n$ , et on montre que cela entraîne  $P(n+1)$ .

## La rédaction type (à apprendre par cœur)

### Méthode – Les 4 étapes d'une récurrence

1. **Énoncer** la propriété : « Pour tout entier  $n \geq n_0$ , on note  $P(n)$  : ... ».
2. **Initialisation** : vérifier que  $P(n_0)$  est vraie (calcul explicite des deux côtés).
3. **Hérédité** : « Soit  $n \geq n_0$  un entier. Supposons  $P(n)$  vraie. Montrons que  $P(n+1)$  est vraie. » Puis on écrit ce qu'on veut obtenir, et on part d'un côté pour y arriver **en utilisant l'HR**.
4. **Conclusion** : « La propriété est vraie au rang  $n_0$  et héréditaire, donc, par récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ . »

## Application 1 : démontrer une formule

### Exemple résolu – Somme des premiers entiers

Montrer que, pour tout  $n \geq 1$  :  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

#### Solution

**Propriété.** Pour  $n \geq 1$ , on note  $P(n)$  : «  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  ».

**Initialisation.** Pour  $n = 1$  : le membre de gauche vaut 1 et celui de droite  $\frac{1 \times 2}{2} = 1$ . Donc  $P(1)$  est vraie.

**Hérédité.** Soit  $n \geq 1$ . Supposons  $P(n)$  vraie, c'est-à-dire  $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Montrons que  $1 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .

$$1 + \dots + n + (n+1) \stackrel{\text{HR}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Donc  $P(n+1)$  est vraie.

**Conclusion.**  $P(1)$  est vraie et la propriété est héréditaire, donc par récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

## Application 2 : suites définies par récurrence

### Exemple résolu – Une suite bornée et croissante

Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ .

#### Solution

**Propriété.**  $P(n)$  : «  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$  ».

**Initialisation.**  $u_0 = 1$  et  $u_1 = \sqrt{3} \approx 1,73$ . On a bien  $0 \leq 1 \leq \sqrt{3} \leq 2$  :  $P(0)$  est vraie.

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ . On ajoute 2 :  $2 \leq u_n + 2 \leq u_{n+1} + 2 \leq 4$ .

La fonction racine carrée est **croissante** sur  $[0 ; +\infty[$ , elle conserve donc l'ordre :  $\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{u_{n+1} + 2} \leq \sqrt{4}$ , soit  $0 \leq \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$ . Donc  $P(n+1)$  est vraie.

**Conclusion.** Par récurrence, pour tout  $n$  :  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ . La suite est donc **croissante** et **majorée par 2**.

### Méthode – Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour encadrer ou comparer des termes, on applique la fonction  $f$  à une inégalité. On a le droit de le faire **seulement si  $f$  est monotone** sur l'intervalle concerné :

- si  $f$  est **croissante**, l'ordre est **conservé** ;
- si  $f$  est **décroissante**, l'ordre est **inversé**.

Pensez donc à étudier les variations de  $f$  **avant** la récurrence.

## Un résultat au programme : l'inégalité de Bernoulli

### Propriété – Inégalité de Bernoulli

Pour tout réel  $a > 0$  et pour tout entier naturel  $n$  :  $(1 + a)^n \geq 1 + na$ .

### Démonstration AU PROGRAMME

Soit  $a > 0$  fixé. Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(n)$  : «  $(1 + a)^n \geq 1 + na$  ».

**Initialisation :**  $(1 + a)^0 = 1$  et  $1 + 0 \times a = 1$ , donc  $1 \geq 1$  :  $P(0)$  est vraie.

**Hérédité :** supposons  $(1 + a)^n \geq 1 + na$ . Comme  $1 + a > 0$ , on peut multiplier les deux membres par  $1 + a$  sans changer le sens :

$$(1 + a)^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a) = 1 + a + na + na^2 = 1 + (n + 1)a + \underbrace{na^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n + 1)a.$$

**Conclusion :** par récurrence, l'inégalité est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Elle sert à montrer que si  $q > 1$ , alors  $q^n \rightarrow +\infty$  (fiche 2).

## 2 Les pièges à éviter

### Attention – Les erreurs classiques

- **Oublier l'initialisation.** Sans elle, on peut « démontrer » n'importe quoi. Exemple :  $P(n)$  : «  $10^n$  est un multiple de 9 » est héréditaire (si  $10^n = 9k$ , alors  $10^{n+1} = 9 \times 10k$ ), mais elle est fausse pour tout  $n$  !
- **Écrire « supposons  $P(n)$  vraie pour tout  $n$  ».** C'est ce qu'on veut démontrer ! On suppose  $P(n)$  vraie pour **un** entier  $n$  fixé.
- **Ne pas utiliser l'hypothèse de récurrence.** Si vous ne l'utilisez jamais dans l'hérédité, c'est qu'il y a un problème (ou que la récurrence est inutile).
- **Appliquer  $f$  à une inégalité sans vérifier que  $f$  est monotone**, ou multiplier par un nombre sans vérifier son signe.
- **Confondre  $u_{n+1}$  et  $u_n + 1$ .** Le premier est le terme suivant, le second est le terme augmenté de 1.

## 3 Avec Python

Une récurrence se **vérifie** numériquement sur les premiers termes (ce n'est pas une démonstration, mais c'est très utile pour conjecturer).

```
from math import sqrt

def termes(n):
    """Renvoie la liste [u0, u1, ..., un] pour u0 = 1 et u(n+1) = sqrt(u(n) + 2)"""
    u = 1
    liste = [u]
    for k in range(n):
        u = sqrt(u + 2)
        liste.append(u)
    return liste

print(termes(6))
# environ [1, 1.732, 1.932, 1.983, 1.996, 1.999, 1.9997] : croissante, proche de 2
```

Python

## 4 Exercices

### Exercice 1 ★

Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$ .

### Exercice 2 ★

Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = 3u_n - 2$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n = 3^n + 1$ .

### Exercice 3 ★★

Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 5$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ .

1. Montrer par récurrence que pour tout  $n : u_n \geq 2$ .
2. En déduire que la suite est décroissante.

### Exercice 4 ★★★

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $4^n - 1$  est divisible par 3.

## 5 Teste-toi (QCM)

- 1 Dans une démonstration par récurrence, l'hérédité consiste à montrer que :  

|                                          |                                                            |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| <b>A.</b> $P(n)$ est vraie pour tout $n$ | <b>B.</b> $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \geq n_0$ |
| <b>C.</b> $P(n_0)$ est vraie             | <b>D.</b> $P(n+1) \Rightarrow P(n)$                        |
- 2 On a montré que  $P(n)$  est héréditaire et que  $P(3)$  est vraie. Alors :  

|                                                         |                                                 |
|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| <b>A.</b> $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ | <b>B.</b> $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 3$ |
| <b>C.</b> $P(2)$ est vraie                              | <b>D.</b> on ne peut rien conclure              |
- 3 Soit  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = 2u_n + 1$ . Que vaut  $u_3$  ?  

|             |              |
|-------------|--------------|
| <b>A.</b> 3 | <b>B.</b> 5  |
| <b>C.</b> 7 | <b>D.</b> 15 |
- 4 Pour appliquer  $f$  à l'inégalité  $a \leq b$  et obtenir  $f(a) \leq f(b)$ , il faut que  $f$  soit :  

|                    |                                                            |
|--------------------|------------------------------------------------------------|
| <b>A.</b> positive | <b>B.</b> croissante sur l'intervalle contenant $a$ et $b$ |
| <b>C.</b> continue | <b>D.</b> décroissante                                     |
- 5 L'inégalité de Bernoulli affirme que pour  $a > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$  :  

|                               |                                |
|-------------------------------|--------------------------------|
| <b>A.</b> $(1+a)^n \leq 1+na$ | <b>B.</b> $(1+a)^n \geq 1+a^n$ |
| <b>C.</b> $(1+a)^n \geq 1+na$ | <b>D.</b> $(1+a)^n = 1+na$     |

### L'essentiel à retenir

- **Initialisation** : on vérifie  $P(n_0)$  par un calcul.
- **Hérédité** : on suppose  $P(n)$  vraie pour un  $n$  fixé, et on démontre  $P(n+1)$  en utilisant l'HR.
- **Conclusion** : phrase type « par récurrence, pour tout  $n \geq n_0$ ... ».
- Toujours écrire clairement ce qu'on veut obtenir au rang  $n+1$ .
- Suites  $u_{n+1} = f(u_n)$  : étudier d'abord les variations de  $f$ .
- $f$  croissante : ordre conservé ;  $f$  décroissante : ordre inversé.
- Bernoulli :  $(1+a)^n \geq 1+na$  pour  $a > 0$ .
- Python permet de conjecturer, pas de démontrer.

## 6 Corrigés

### Exercice 1

**Initialisation :** pour  $n = 0$ ,  $\sum_{k=0}^0 2^k = 1$  et  $2^1 - 1 = 1$ . Vraie.

**Hérédité :** supposons  $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$ . Alors  $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} = 2 \times 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$ . C'est  $P(n+1)$ .

**Conclusion :** par récurrence, la formule est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 2

**Initialisation :**  $3^0 + 1 = 2 = u_0$ . **Hérédité :** si  $u_n = 3^n + 1$ , alors  $u_{n+1} = 3(3^n + 1) - 2 = 3^{n+1} + 3 - 2 = 3^{n+1} + 1$ . **Conclusion :** pour tout  $n$ ,  $u_n = 3^n + 1$ .

### Exercice 3

1. **Initialisation :**  $u_0 = 5 \geq 2$ . **Hérédité :** si  $u_n \geq 2$ , alors  $\frac{1}{2}u_n \geq 1$ , donc  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \geq 2$ . Par récurrence,  $u_n \geq 2$  pour tout  $n$ .

2.  $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 1 = \frac{2-u_n}{2}$ . Or  $u_n \geq 2$ , donc  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  : la suite est décroissante.

### Exercice 4

$P(n)$  : « il existe un entier  $k$  tel que  $4^n - 1 = 3k$  ». **Initialisation :**  $4^0 - 1 = 0 = 3 \times 0$ . **Hérédité :** si  $4^n - 1 = 3k$ , alors  $4^n = 3k + 1$  et  $4^{n+1} - 1 = 4(3k + 1) - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$ , multiple de 3. **Conclusion :** par récurrence,  $4^n - 1$  est divisible par 3 pour tout  $n$ .

### QCM

1. B · 2. B · 3. C ( $u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 7$ ) · 4. B · 5. C