

Limites de suites

Si tu places 1 000 € à 3 % par an, ton capital finira-t-il par dépasser un million ? Et si tu avances chaque jour de la moitié de la distance qui te reste, arriveras-tu un jour au bout ?

Ce que tu vas savoir faire

- Comprendre et utiliser les définitions d'une limite finie ou infinie d'une suite
- Calculer une limite avec les opérations et lever une forme indéterminée
- Utiliser les théorèmes de comparaison et des gendarmes
- Connaître et démontrer la limite de q^n selon la valeur de q
- Justifier qu'une suite monotone converge ou diverge vers l'infini
- Écrire un algorithme de recherche de seuil en Python

À revoir avant de commencer

- Suites arithmétiques et géométriques, somme des termes (1re)
- Sens de variation d'une suite
- Raisonnement par récurrence et inégalité de Bernoulli (fiche 1)
- Calcul littéral : factoriser, quantité conjuguée, règle des signes

1 Le cours

L'idée : vers quoi s'approchent les termes ?

Étudier la **limite** d'une suite (u_n) , c'est se demander ce que deviennent les termes u_n quand n devient **très grand**. Trois comportements sont possibles :

- les termes s'accumulent autour d'un nombre ℓ : la suite **converge** vers ℓ (ex. : $2 + \frac{1}{n}$ s'approche de 2) ;
- les termes deviennent aussi grands qu'on veut : la suite **tend vers** $+\infty$ (ex. : n^2), ou vers $-\infty$;
- les termes ne se stabilisent pas : la suite **n'a pas de limite** (ex. : $(-1)^n$ vaut 1, -1, 1, -1, ...).

L'expression clé du chapitre est « **à partir d'un certain rang** » : seul compte le comportement de **tous** les termes au-delà d'un rang N , peu importe les premiers.

1. Limite infinie

Définition – Suite tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$

On dit que (u_n) **tend vers** $+\infty$ si **tout** intervalle $]A ; +\infty[$ (avec A réel, aussi grand qu'on veut) contient **tous les termes** u_n **à partir d'un certain rang**. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

De même, (u_n) **tend vers** $-\infty$ si tout intervalle $] -\infty ; A[$ contient tous les termes à partir d'un certain rang.

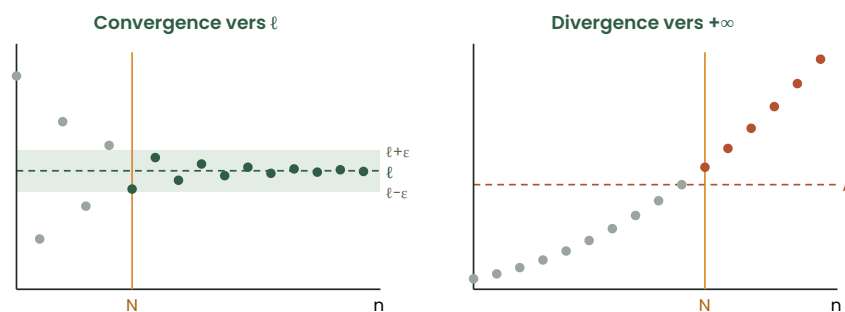
Autrement dit : quel que soit le « plafond » A que tu choisis, les termes finissent par le dépasser **et ne redescendent plus jamais** en dessous. *Exemple* : pour $u_n = n^2$ et $A > 0$, dès que $n > \sqrt{A}$ on a $u_n > A$ (pour $A = 10^6$: dès que $n > 1\,000$). C'est vrai pour tout A , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$.

2. Limite finie, suites convergentes et divergentes

Définition – Suite convergente

Soit ℓ un réel. On dit que (u_n) **converge vers** ℓ (ou a pour limite ℓ) si **tout intervalle ouvert contenant** ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Une suite qui ne converge pas est dite **divergente** : soit elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, soit elle n'a pas de limite.



À gauche : à partir du rang N , tous les termes restent dans la bande autour de ℓ . À droite : à partir du rang N , tous les termes dépassent A .

Propriétés (admisses)

- **Unicité** : si une suite a une limite, cette limite est **unique**.
- **Suites de référence** : $n, n^2, n^3, \sqrt{n}$ (et plus généralement n^k avec $k \geq 1$ entier) tendent vers $+\infty$; $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n^k}$ tendent vers 0.

Remarque – Diverger $\neq$ exploser

$u_n = (-1)^n$ est **bornée** (entre -1 et 1) et pourtant divergente : elle oscille sans jamais se stabiliser. À l'inverse, $\frac{1}{n}$ converge vers 0 sans **jamais** valoir 0.

3. Opérations sur les limites

Dans la plupart des cas, on ne revient pas à la définition : on combine les limites de suites connues grâce aux tableaux suivants (ℓ et ℓ' sont des réels ; « ∞ » signifie $+\infty$ ou $-\infty$, le signe s'obtenant par la **règle des signes**). Les cases **FI** sont des **formes indéterminées** : les tableaux ne permettent pas de conclure directement.

Somme $u_n + v_n$						
$\lim u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Produit $u_n \times v_n$				
$\lim u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
$\lim v_n$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim u_n v_n$	$\ell \ell'$	∞	∞	FI

Quotient $\frac{u_n}{v_n}$						
$\lim u_n$	ℓ	ℓ	∞	$\ell \neq 0$ ou ∞	0	∞
$\lim v_n$	$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' \neq 0$	0^*	0	∞
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	∞	∞	FI	FI

* à condition que v_n garde un signe constant à partir d'un certain rang (le signe de v_n donne alors le signe de l'infini).

Méthode – Lever une forme indéterminée

Les quatre formes indéterminées sont : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$. Pour les lever, on **transforme l'écriture** :

- **polynôme en n** : on factorise par le terme de plus haut degré ;
- **quotient** : on factorise le numérateur **et** le dénominateur par leur terme de plus haut degré, puis on simplifie ;
- **différence de racines carrées** : on multiplie et divise par la **quantité conjuguée**, en utilisant $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Exemples résolus – Quatre formes indéterminées

a) $u_n = n^2 - 3n + 1$ **b)** $v_n = \frac{3n^2 - n + 1}{2n^2 + 5}$ **c)** $w_n = n - \sqrt{n}$ **d)** $t_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Solution

a) Forme « $+\infty - \infty$ ». Pour $n \geq 1$: $u_n = n^2 \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$. La parenthèse tend vers 1 et $n^2 \rightarrow +\infty$, donc par produit $\lim u_n = +\infty$.

b) Forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $n \geq 1$: $v_n = \frac{n^2 \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(2 + \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^2}}$. Numérateur $\rightarrow 3$, dénominateur $\rightarrow 2$, donc $\lim v_n = \frac{3}{2}$.

c) Forme « $+\infty - \infty$ ». $w_n = \sqrt{n}(\sqrt{n} - 1)$: produit de deux suites qui tendent vers $+\infty$, donc $\lim w_n = +\infty$.

d) Forme « $+\infty - \infty$ ». Avec la quantité conjuguée :

$$t_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim t_n = 0$.

4. Limites et comparaison

Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, **à partir d'un certain rang**, $u_n \geq v_n$.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (une suite plus grande qu'une suite qui « explose » explose aussi).
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Démonstration du premier point

AU PROGRAMME

Par hypothèse, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$: $u_n \geq v_n$.

Soit A un réel quelconque. Comme $\lim v_n = +\infty$, l'intervalle $]A ; +\infty[$ contient tous les termes v_n à partir d'un certain rang n_1 : pour tout $n \geq n_1$, $v_n > A$.

Notons N le plus grand des deux entiers n_0 et n_1 . Pour tout $n \geq N$, les deux inégalités sont vraies en même temps, donc $u_n \geq v_n > A$.

Ainsi, l'intervalle $]A ; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir du rang N . Ceci étant vrai pour tout réel A , on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Théorème des gendarmes (admis)

Soient (u_n) , (v_n) , (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$. Si (v_n) et (w_n) convergent vers **la même limite** ℓ , alors (u_n) converge aussi vers ℓ .

Propriété – Passage à la limite dans une inégalité (admise)

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$, et si (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers ℓ et ℓ' , alors $\ell \leq \ell'$. *Attention : une inégalité stricte $u_n < v_n$ ne donne que $\ell \leq \ell'$ (exemple : $0 < \frac{1}{n}$ mais les deux limites valent 0).*

Exemples résolus – Comparer ou encadrer

a) $u_n = n + (-1)^n$ **b)** $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$ **c)** $w_n = -n^2 + \cos n$

Solution

a) $(-1)^n$ n'a pas de limite, les tableaux ne s'appliquent pas. Mais $(-1)^n \geq -1$, donc $u_n \geq n - 1$. Comme $\lim(n - 1) = +\infty$, par comparaison, $\lim u_n = +\infty$.

b) Pour $n \geq 1$: $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, et en divisant par $n > 0$: $-\frac{1}{n} \leq v_n \leq \frac{1}{n}$. Les deux suites encadrantes tendent vers 0, donc par le théorème des gendarmes, $\lim v_n = 0$.

c) $\cos n \leq 1$ donc $w_n \leq -n^2 + 1$. Or $\lim(-n^2 + 1) = -\infty$, donc par comparaison, $\lim w_n = -\infty$.

Méthode – Quel théorème choisir ?

- Tu soupçonnes une limite $+\infty$: cherche une suite **plus petite** (on **minore**) qui tend vers $+\infty$.
- Tu soupçonnes une limite $-\infty$: cherche une suite **plus grande** (on **major**) qui tend vers $-\infty$.
- Tu soupçonnes une limite finie ℓ : **encadre** par deux suites qui tendent vers ℓ (gendarmes). Outils fréquents : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, $-1 \leq \sin n \leq 1$, $-1 \leq \cos n \leq 1$.

5. Limite d'une suite géométrique (q^n)

Théorème – Limite de q^n

Valeur de q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	pas de limite	0	1	$+\infty$

Démonstration du cas $q > 1$ AU PROGRAMME

Si $q > 1$, on pose $a = q - 1$, de sorte que $a > 0$ et $q = 1 + a$.

D'après l'**inégalité de Bernoulli** (démontrée par récurrence dans la fiche 1), pour tout entier naturel n : $q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na$.

Or $a > 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$. La suite (q^n) est minorée par une suite qui tend vers $+\infty$; d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Pourquoi les autres cas ?

- **Si $0 < |q| < 1$:** $Q = \frac{1}{|q|} > 1$, donc $Q^n \rightarrow +\infty$ et $|q^n| = |q|^n = \frac{1}{Q^n} \rightarrow 0$; ainsi $q^n \rightarrow 0$ (et si $q = 0$, $q^n = 0$ pour $n \geq 1$).
- **Si $q \leq -1$:** les termes changent de signe à chaque rang et $|q^n| \geq 1$: ils ne s'approchent d'aucun nombre (par exemple $(-2)^n$ vaut 1, -2, 4, -8, 16, ...).

Exemples résolus – Suites géométriques

a) $u_n = 5 \times 0,8^n + 1$ **b)** $v_n = 2^n - 5^n$ **c)** $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Solution

a) $-1 < 0,8 < 1$ donc $0,8^n \rightarrow 0$ et, par opérations, $\lim u_n = 5 \times 0 + 1 = 1$.

b) Forme « $+\infty - \infty$ ». On factorise par le terme dominant 5^n : $v_n = 5^n \left(\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1 \right)$. Comme $-1 < \frac{2}{5} < 1$, la parenthèse tend vers -1 ; et $5^n \rightarrow +\infty$. Par produit, $\lim v_n = -\infty$.

c) C'est la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$: $S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)$. Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \rightarrow 0$, on obtient $\lim S_n = 2$.

Réponse à l'accroche : si tu avances chaque jour de la moitié de la distance restante (disons 1 km au départ), la distance restante au bout de n jours vaut $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ km : elle tend vers 0 mais n'est jamais nulle. Tu t'approches autant que tu veux de l'arrivée... sans jamais l'atteindre !

6. Suites monotones

Théorème de convergence monotone (admis)

- Toute suite **croissante et majorée** converge.
- Toute suite **décroissante et minorée** converge.

De plus, si (u_n) est croissante et converge vers ℓ , alors $u_n \leq \ell$ pour tout n (et si elle est décroissante, $u_n \geq \ell$).

Théorème – Suite croissante non majorée

Si une suite (u_n) est **croissante et non majorée**, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. (De même, une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.)

Attention : le théorème de convergence monotone prouve que la limite **existe**, sans donner sa valeur : si $u_n \leq M$ pour tout n , on sait seulement que $\ell \leq M$ (ex. : $1 - \frac{1}{n}$ est majorée par 5 mais converge vers 1).

Démonstration AU PROGRAMME

Soit A un réel quelconque. La suite n'est pas majorée, donc A n'est pas un majorant : il existe un rang N tel que $u_N > A$.

La suite est croissante, donc pour tout $n \geq N : u_n \geq u_N > A$.

Ainsi, tous les termes à partir du rang N sont dans $]A ; +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout réel A , on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2 Les pièges à éviter

Attention – Les erreurs classiques

- **Écrire « $\infty - \infty = 0$ » ou « $\frac{\infty}{\infty} = 1$ ».** Ce sont des FI : $n^2 - n \rightarrow +\infty$ mais $(n+1) - n \rightarrow 1$. On transforme l'écriture.
- **Croire qu'une suite croissante tend forcément vers $+\infty$.** $2 - \frac{1}{n}$ est croissante et converge vers 2 : il faut en plus qu'elle soit **non majorée**.
- **Croire qu'une suite majorée par M converge vers M .** Le théorème donne seulement $\ell \leq M$.
- **Se tromper de sens dans la comparaison.** Pour montrer $u_n \rightarrow +\infty$, il faut $u_n \geq v_n$ avec $v_n \rightarrow +\infty$; savoir que $u_n \leq n^2$ ne prouve rien. Gendarmes : les deux encadrantes doivent avoir la **même** limite.
- **Appliquer « $q^n \rightarrow 0$ » hors de $] -1 ; 1[$.** $1,01^n \rightarrow +\infty$, et $(-2)^n$ n'a **pas** de limite (elle ne tend pas vers $+\infty$).

3 Avec Python

Méthode – Trouver le premier rang où une condition est vérifiée

Si $u_n \rightarrow +\infty$, la suite finit par dépasser tout seuil A . Pour trouver le **plus petit** rang n tel que $u_n \geq A$, on calcule les termes un par un **tant que** le but n'est pas atteint : boucle while avec la **condition contraire** du but (pour $u_n \geq A$, on écrit while $u < A$). Même principe pour le premier rang où $|u_n - \ell| < 0,001$.

Exemple : on place 1 000 € à 3 % d'intérêts composés par an. Le capital après n années est u_n , avec $u_0 = 1\,000$ et $u_{n+1} = 1,03 u_n$ (suite géométrique de raison $1,03 > 1$, donc $u_n \rightarrow +\infty$). Au bout de combien d'années le capital atteint-il un seuil A ?

```
def seuil(A):
    """Plus petit rang n tel que u(n) >= A, pour u(0) = 1000 et u(n+1) = 1,03 * u(n)"""
    n = 0
    u = 1000
    while u < A:
        # tant que le seuil n'est pas atteint...
        n = n + 1
        # ... on passe au rang suivant
        u = 1.03 * u
        # ... et on calcule le terme suivant
    return n

print(seuil(2000))    # affiche 24
print(seuil(10000))   # affiche 78
```

Python

Le capital double en 24 ans ($1,03^{23} \approx 1,974$ et $1,03^{24} \approx 2,033$), décuple en 78 ans et dépasse un million au bout de 234 ans ! La boucle s'arrête car $u_n \rightarrow +\infty$; si la suite ne dépassait jamais A , elle tournerait sans fin.

4 Exercices

Exercice 1 – Opérations et formes indéterminées ★

Déterminer la limite de chaque suite (définie pour $n \geq 1$) :

a) $u_n = 4 - \frac{2}{n}$ b) $v_n = \left(5 + \frac{1}{n}\right)(\sqrt{n} + 1)$ c) $w_n = n^2 - 5n$ d) $t_n = \frac{2n + 3}{5n - 1}$ e) $z_n = \frac{n^2 + 1}{n + 4}$
 f) $r_n = \sqrt{n + 3} - \sqrt{n}$

Exercice 2 – Comparaison et gendarmes ★★

Déterminer la limite de chaque suite (définie pour $n \geq 1$) en justifiant par un théorème de comparaison :

a) $u_n = n^2 + (-1)^n n$ b) $v_n = \frac{2 + \sin n}{n}$ c) $w_n = \frac{3n + \cos n}{n + 1}$ d) $t_n = -n + \sin n$

Exercice 3 – Suites géométriques ★★

1. Déterminer la limite de : a) $3 \times 1,2^n$ b) $5 - 2 \times 0,7^n$ c) $(-0,5)^n$ d) $\frac{2^n + 3^n}{4^n}$ e) $3^n - 2^n$.

2. On pose $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Exprimer S_n en fonction de n , puis déterminer $\lim S_n$.

Exercice 4 – Type bac ★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,6 u_n + 4$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.
3. En déduire que la suite (u_n) converge.
4. On pose $v_n = u_n - 10$. Montrer que (v_n) est géométrique, puis que $u_n = 10 - 8 \times 0,6^n$.
5. Déterminer la limite de (u_n) .
6. Écrire une fonction Python `seuil()` qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geq 9,99$. Quelle valeur renvoie-t-elle ?

5 Teste-toi (QCM)

- 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2n^2}{n^2 + 3}$ est égale à :
A. 1 B. -2 C. 0 D. $-\infty$
- 2 Une suite croissante et majorée par 5 :
A. converge vers 5 B. converge vers un réel $\ell \leq 5$
C. tend vers $+\infty$ D. peut ne pas avoir de limite
- 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,99^n$ est égale à :
A. $+\infty$ B. 1 C. 0 D. elle n'existe pas
- 4 Si pour tout n , $u_n \geq n^2 - 3$, alors :
A. $\lim u_n = +\infty$ B. (u_n) converge C. $\lim u_n = 0$ D. on ne peut rien conclure
- 5 Laquelle de ces formes n'est **pas** indéterminée ?
A. $\infty - \infty$ B. $0 \times \infty$ C. $(+\infty) + (+\infty)$ D. $\frac{\infty}{\infty}$

L'essentiel à retenir

- $u_n \rightarrow +\infty$: tout $]A; +\infty[$ contient tous les u_n à partir d'un certain rang.
- $u_n \rightarrow \ell$: tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les u_n à partir d'un certain rang. Sinon : divergente.
- 4 formes indéterminées : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.
- Lever une FI : factoriser par le terme dominant, ou quantité conjuguée.
- Comparaison : $u_n \geq v_n$ et $v_n \rightarrow +\infty \Rightarrow u_n \rightarrow +\infty$.
- Gendarmes : $v_n \leq u_n \leq w_n$, $v_n \rightarrow \ell$, $w_n \rightarrow \ell \Rightarrow u_n \rightarrow \ell$.
- $q > 1 : q^n \rightarrow +\infty$; $-1 < q < 1 : q^n \rightarrow 0$; $q \leq -1$: pas de limite.
- Croissante + majorée $\Rightarrow$ converge ; décroissante + minorée $\Rightarrow$ converge.
- Croissante + non majorée $\Rightarrow$ tend vers $+\infty$.
- Seuil : boucle **while** avec la condition contraire du but.

6 Corrigés

Exercice 1

a) $\frac{2}{n} \rightarrow 0$ donc $\lim u_n = 4$. **b)** $5 + \frac{1}{n} \rightarrow 5$ et $\sqrt{n} + 1 \rightarrow +\infty$; par produit ($5 > 0$), $\lim v_n = +\infty$.

c) Fl « $\infty - \infty$ » : $w_n = n^2 \left(1 - \frac{5}{n}\right)$ et la parenthèse tend vers 1, donc $\lim w_n = +\infty$.

d) Fl « $\frac{\infty}{\infty}$ » : on factorise par n en haut et en bas, $t_n = \frac{2 + \frac{3}{n}}{5 - \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{2}{5}$.

e) On factorise par n^2 en haut, par n en bas : $z_n = n \times \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{4}{n}}$; la fraction tend vers 1, donc $\lim z_n = +\infty$.

f) Quantité conjuguée : $r_n = \frac{(n+3) - n}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim r_n = 0$.

Exercice 2

a) $(-1)^n n \geq -n$ donc $u_n \geq n(n-1)$, qui tend vers $+\infty$: par comparaison, $\lim u_n = +\infty$.

b) $-1 \leq \sin n \leq 1$ donc $1 \leq 2 + \sin n \leq 3$, et en divisant par $n > 0$: $\frac{1}{n} \leq v_n \leq \frac{3}{n}$. Les deux encadrantes tendent vers 0 : par les gendarmes, $\lim v_n = 0$.

c) $-1 \leq \cos n \leq 1$ donc $3n - 1 \leq 3n + \cos n \leq 3n + 1$; on divise par $n + 1 > 0$: $\frac{3n-1}{n+1} \leq w_n \leq \frac{3n+1}{n+1}$. En factorisant par n , les deux encadrantes tendent vers $\frac{3}{1} = 3$. Par les gendarmes, $\lim w_n = 3$.

d) $\sin n \leq 1$ donc $t_n \leq -n + 1$. Or $-n + 1 \rightarrow -\infty$, donc par comparaison $\lim t_n = -\infty$.

Exercice 3

1. **a)** $1,2 > 1$ donc $1,2^n \rightarrow +\infty$ et $\lim 3 \times 1,2^n = +\infty$. **b)** $0,7^n \rightarrow 0$, limite 5. **c)** $-1 < -0,5 < 1$, limite 0.

d) $\frac{2^n + 3^n}{4^n} = \left(\frac{2}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0,5^n + 0,75^n \rightarrow 0 + 0 = 0$.

e) Fl « $\infty - \infty$ » : $3^n - 2^n = 3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$. La parenthèse tend vers 1 et $3^n \rightarrow +\infty$, donc la limite est $+\infty$.

2. Somme de $n + 1$ termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 1 : $S_n =$

$\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$. Comme $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \rightarrow 0$: $\lim S_n = \frac{3}{2}$.

Exercice 4

1. $u_1 = 0,6 \times 2 + 4 = 5,2$ et $u_2 = 0,6 \times 5,2 + 4 = 7,12$.

2. $P(n)$: « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$ ». **Initialisation** : $0 \leq 2 \leq 5,2 \leq 10$, donc $P(0)$ est vraie. **Hérédité** : supposons $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$. On multiplie par $0,6 > 0$ puis on ajoute 4 : $4 \leq 0,6u_n + 4 \leq 0,6u_{n+1} + 4 \leq 10$, c'est-à-dire $0 \leq 4 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10$. Donc $P(n+1)$ est vraie. **Conclusion** : par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout n .

3. D'après 2, (u_n) est croissante et majorée par 10 : elle converge (théorème de convergence monotone).

4. $v_{n+1} = u_{n+1} - 10 = 0,6u_n + 4 - 10 = 0,6u_n - 6 = 0,6(u_n - 10) = 0,6v_n$. Donc (v_n) est géométrique de raison 0,6 et de premier terme $v_0 = 2 - 10 = -8$. Ainsi $v_n = -8 \times 0,6^n$ et $u_n = v_n + 10 = 10 - 8 \times 0,6^n$.

5. $-1 < 0,6 < 1$ donc $0,6^n \rightarrow 0$, et $\lim u_n = 10 - 8 \times 0 = 10$.

6. On reprend la fonction de la partie « Avec Python » avec $u = 2$ au départ, la condition `while u < 9.99` : et le calcul `u = 0.6 * u + 4`. Elle renvoie 14, car $u_{13} = 10 - 8 \times 0,6^{13} \approx 9,9896$ et $u_{14} \approx 9,9937$.

QCM

1. B (on factorise par $n^2 : \frac{-2+1/n^2}{1+3/n^2} \rightarrow -2$) · 2. B (converge, mais pas forcément vers 5) · 3. C (car $|0,99| < 1$)
· 4. A (comparaison : $n^2 - 3 \rightarrow +\infty$) · 5. C (somme égale à $+\infty$)