

Limites de fonctions

Quand x devient très grand, qui gagne la course entre e^x et x^{10} ? Pendant longtemps, x^{10} est loin devant... mais à partir de $x = 36$, l'exponentielle passe devant... et pour toujours !

Ce que tu vas savoir faire

- Déterminer la limite d'une fonction en $+\infty$, en $-\infty$ ou en un réel (à gauche, à droite)
- Interpréter une limite par une asymptote horizontale ou verticale
- Calculer une limite par opérations et lever une forme indéterminée
- Utiliser la limite d'une composée et les théorèmes de comparaison
- Connaître et démontrer les croissances comparées de x^n et e^x

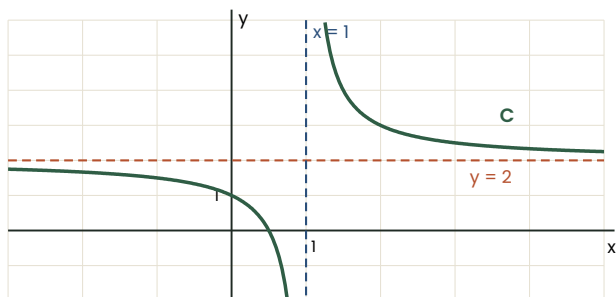
À revoir avant de commencer

- Limites de suites : opérations, formes indéterminées, comparaison (fiche 2)
- Fonction exponentielle : propriétés algébriques, dérivée, variations (1re)
- Fonctions de référence : carré, cube, inverse, racine carrée
- Signe d'une expression, tableau de signes

1 Le cours

L'idée : que devient $f(x)$ quand x s'approche de quelque chose ?

Pour une suite, on regardait seulement $n \rightarrow +\infty$. Pour une fonction, x peut tendre vers $+\infty$, vers $-\infty$, ou vers un **réel** a (souvent une valeur interdite). Dans chaque cas, on se demande si $f(x)$ s'approche d'un nombre, devient aussi grand qu'on veut, ou rien de tout cela. Graphiquement, les limites se lisent sur la courbe grâce aux **asymptotes**.



Courbe de $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$: asymptote horizontale $y = 2$ et asymptote verticale $x = 1$.

Sur cette courbe, on lit :

- quand $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, $f(x)$ se rapproche de 2 : la courbe « colle » à la droite $y = 2$;
- quand x s'approche de 1 par la **droite** ($x > 1$), $f(x)$ devient aussi grand qu'on veut ; par la **gauche** ($x < 1$), $f(x)$ devient aussi négatif qu'on veut : la courbe longe la droite $x = 1$.

1. Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

Définitions

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si tout intervalle $]A; +\infty[$ contient **toutes** les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (réel) si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand. On dit alors que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe en $+\infty$.

On définit de même $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, et les limites en $-\infty$ (« dès que x est assez petit »).

Limites des fonctions de référence (à connaître)

$f(x)$	x^n ($n \geq 1$)	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	e^x
en $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	0	$+\infty$
en $-\infty$	$+\infty$ si n pair, $-\infty$ si n impair	—	0	—	0

2. Limite en un réel a

Définition – Limite infinie en a , asymptote verticale

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si tout intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez proche de a . Idem pour $-\infty$. La droite d'équation $x = a$ est alors **asymptote verticale** à la courbe.

Souvent, la limite n'est pas la même des deux côtés de a : on calcule la **limite à droite** ($x \rightarrow a$ avec $x > a$, notée $x \rightarrow a^+$) et la **limite à gauche** ($x \rightarrow a$ avec $x < a$, notée $x \rightarrow a^-$).

Exemples de référence

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Limite finie en a

Pour les fonctions usuelles (polynômes, exp, racine, quotients...) définies en a , on a simplement $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$: on remplace x par a . Ex. : $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5$.

3. Opérations et formes indéterminées

Bonne nouvelle : les règles sur les sommes, produits et quotients sont **exactement les mêmes que pour les suites** (tableaux de la fiche 2), que x tende vers $+\infty$, $-\infty$ ou a . On retrouve les quatre formes indéterminées $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, qu'on lève en **transformant l'écriture**.

Méthode – Quotient dont le dénominateur tend vers 0

Si le numérateur tend vers un réel $\ell \neq 0$ et le dénominateur vers 0, le quotient tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ selon le signe du dénominateur. On étudie donc le **signe du dénominateur** à gauche et à droite de a (tableau de signes), puis on applique la règle des signes. On note 0^+ (resp. 0^-) une quantité qui tend vers 0 en restant positive (resp. négative).

Exemples résolus

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x}{x^2 + 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + x^2 + 5)$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x + 1}{x - 3}$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x + 1}{x - 3}$

Solution

a) FI « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x \neq 0$: $\frac{3x^2 - x}{x^2 + 1} = \frac{x^2(3 - \frac{1}{x})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow \frac{3}{1} = 3$. La droite $y = 3$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

b) En $-\infty$: $2x^3 \rightarrow -\infty$ mais $x^2 \rightarrow +\infty$: FI « $-\infty + \infty$ ». On factorise par le terme de plus haut degré : $2x^3 + x^2 + 5 = x^3(2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3})$. La parenthèse tend vers 2 et $x^3 \rightarrow -\infty$, donc par produit la limite est $-\infty$.

c) Le numérateur tend vers $2 \times 3 + 1 = 7$ et le dénominateur vers 0. Signe de $x - 3$: positif si $x > 3$, négatif si $x < 3$. Donc $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x + 1}{x - 3} = \frac{7}{0^+} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x + 1}{x - 3} = \frac{7}{0^-} = -\infty$. La droite $x = 3$ est asymptote verticale.

4. Limite d'une fonction composée

Théorème – Composée (admis)

Soient a, b, c des réels ou $\pm\infty$. Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{X \rightarrow b} g(X) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(u(x)) = c$.

Exemples résolus – On procède « de l'intérieur vers l'extérieur »

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{x}}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x}$

Solution

a) On pose $X = -x^2$: quand $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow -\infty$, et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$.

b) $X = 4 + \frac{1}{x} \rightarrow 4$ et $\lim_{X \rightarrow 4} \sqrt{X} = 2$. Donc la limite vaut 2.

c) Si $x \rightarrow 0^+$, $X = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ et $e^X \rightarrow +\infty$: limite $+\infty$. Si $x \rightarrow 0^-$, $X = \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ et $e^X \rightarrow 0$: limite 0.

5. Limites et comparaison

Théorèmes de comparaison et des gendarmes (admis)

Les résultats sont les mêmes que pour les suites, « pour x assez grand » (ou assez proche de a) :

- si $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
- si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;
- **gendarmes** : si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si g et h ont la même limite ℓ en $+\infty$, alors f tend aussi vers ℓ en $+\infty$.

Exemples résolus

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x}$

Solution

a) $\sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$, mais $\sin x \geq -1$ donc $x + \sin x \geq x - 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$, par comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x) = +\infty$.

b) Pour $x > 0$: $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$. Les deux encadrantes tendent vers 0 : par les gendarmes, la limite vaut 0.

6. Croissances comparées

En $+\infty$, e^x et x^n tendent tous les deux vers $+\infty$: le quotient $\frac{e^x}{x^n}$ est une forme indéterminée. Le résultat suivant dit qui l'emporte : **l'exponentielle gagne toujours**, quelle que soit la puissance.

Théorème – Croissances comparées de x^n et e^x

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0.$$

Démonstration (cas $n = 1$, puis cas général) AU PROGRAMME

Étape 1 : $e^x \geq x + 1$ pour tout x . Soit $h(x) = e^x - x - 1$. Alors $h'(x) = e^x - 1$, négatif sur $] -\infty ; 0[$ et positif sur $] 0 ; +\infty[$: h admet un minimum en 0, égal à $h(0) = 0$. Donc $h(x) \geq 0$.

Étape 2 : $e^x > \frac{x^2}{2}$ pour $x \geq 0$. Soit $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ sur $[0 ; +\infty[$. Alors $g'(x) = e^x - x \geq 1 > 0$ d'après l'étape 1. Donc g est croissante sur $[0 ; +\infty[$ et $g(x) \geq g(0) = 1 > 0$.

Étape 3 : cas $n = 1$. Pour $x > 0$, en divisant par x : $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, par comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Étape 4 : cas général. Pour $x > 0$, on pose $X = \frac{x}{n}$: $\frac{e^x}{x^n} = \frac{(e^X)^n}{(nX)^n} = \frac{1}{n^n} \left(\frac{e^X}{X} \right)^n$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow +\infty$, donc $\frac{e^X}{X} \rightarrow +\infty$ (étape 3) et, par produit, $\frac{e^x}{x^n} \rightarrow +\infty$.

Conséquences : $x^n e^{-x} = \frac{1}{e^x/x^n} \rightarrow 0$ en $+\infty$; en $-\infty$, on pose $X = -x \rightarrow +\infty$: $x^n e^x = (-1)^n X^n e^{-X} \rightarrow 0$.

Et le logarithme ?

Tu verras dans la fiche 6 le résultat « symétrique » : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. En $+\infty$, x l'emporte sur $\ln x$ comme e^x l'emporte sur x . À retenir : $e^x \gg x^n \gg \ln x$ en $+\infty$.

Exemples résolus – Factoriser par le terme qui l'emporte

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)e^{-x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

Solution

a) FI « $\infty - \infty$ ». On factorise par x^3 : $e^x - x^3 = x^3 \left(\frac{e^x}{x^3} - 1 \right)$. Par croissances comparées, la parenthèse tend vers $+\infty$; par produit, la limite est $+\infty$.

b) FI « $\infty \times 0$ ». On développe : $(x^2 + 1)e^{-x} = x^2 e^{-x} + e^{-x}$. Par croissances comparées $x^2 e^{-x} \rightarrow 0$, et $e^{-x} \rightarrow 0$: la limite est 0.

c) FI « $\frac{0}{0}$ ». On reconnaît un **taux d'accroissement** : $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0}$, qui tend vers le nombre dérivé de exp en 0, c'est-à-dire $e^0 = 1$.

2 Les pièges à éviter

Attention – Les erreurs classiques

- **Oublier les deux côtés.** En une valeur interdite a , la limite à gauche et la limite à droite peuvent être différentes ($\frac{1}{x}$ en 0). Il faut faire un tableau de signes du dénominateur.
- **Écrire « $\frac{7}{0} = +\infty$ » sans regarder le signe.** Le signe de l'infini dépend du signe du dénominateur : $\frac{7}{0^-} = -\infty$.
- **Se tromper de signe en $-\infty$.** $x^3 \rightarrow -\infty$ mais $x^2 \rightarrow +\infty$; et $e^x \rightarrow 0$ (et non $-\infty$) quand $x \rightarrow -\infty$.
- **Croire que x^{100} l'emporte sur e^x .** En $+\infty$, c'est toujours l'exponentielle qui gagne, même si c'est « tard ».
- **Confondre asymptote horizontale et verticale.** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$ donne la droite $y = \ell$; $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ donne la droite $x = a$.

3 Avec Python

Pour « voir » les croissances comparées, cherchons à partir de quel entier x l'exponentielle dépasse x^n (avec $n \geq 3$, on part de $x = 2$, où $e^2 \approx 7,4 < 2^n$).

```
from math import exp

def seuil(n):
    """Plus petit entier x >= 2 tel que exp(x) > x**n (pour n >= 3)"""
    x = 2
    while exp(x) <= x**n:      # tant que l'exponentielle n'a pas dépassé x^n...
        x = x + 1             # ... on avance d'une unité
    return x

print(seuil(3))    # affiche 5
print(seuil(5))    # affiche 13
print(seuil(10))   # affiche 36
```

Python

Par exemple, $e^{35} \approx 1,6 \times 10^{15} < 35^{10} \approx 2,8 \times 10^{15}$, mais $e^{36} \approx 4,3 \times 10^{15} > 36^{10} \approx 3,7 \times 10^{15}$. Plus n est grand, plus le dépassement arrive tard... mais il arrive toujours : c'est exactement ce que dit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

4 Exercices

Exercice 1 – Limites à l'infini ★

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 4x + 1)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 4x + 1)$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{5x^2 - x}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - 1}{x^2 + 2}$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{3x + 2}$
 f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{2}{x} + e^{-x} \right)$

Exercice 2 – Asymptotes ★

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, de courbe $\mathcal{C}$.

- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Déterminer les limites de f en 2 à gauche et à droite.
- En déduire les asymptotes à $\mathcal{C}$.

Exercice 3 – Composées et comparaison ★★

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x}}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \cos x}{x}$ e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + \sin x)$

Exercice 4 – Croissances comparées ★★

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$

Exercice 5 – Type bac ★★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$, de courbe $\mathcal{C}$.

- Déterminer la limite de f en $-\infty$.
- Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement.
- Montrer que $f'(x) = -xe^{-x}$, puis dresser le tableau de variations complet de f .
- En utilisant un nombre dérivé, déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$.

5 Teste-toi (QCM)

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 3x^2}{x^2 + x}$ est égale à :

A. 1

B. -3

C. 0

D. $-\infty$

- 2 $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2}$ est égale à :
 A. $+\infty$ B. 0 C. $-\infty$ D. $\frac{1}{2}$
- 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 e^{-x}$ est égale à :
 A. $+\infty$ B. 1 C. $-\infty$ D. 0
- 4 Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, alors la courbe de f admet :
 A. l'asymptote verticale $x = 3$ B. l'asymptote horizontale $y = 3$
 C. une tangente horizontale en 3 D. aucune asymptote
- 5 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x}$ est égale à :
 A. 0 B. $+\infty$ C. e D. 1

L'essentiel à retenir

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$: asymptote horizontale $y = \ell$.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$: asymptote verticale $x = a$.
- En une valeur interdite : limites à gauche et à droite, avec le signe du dénominateur.
- Mêmes règles d'opérations et mêmes 4 FI que pour les suites.
- Polynôme ou quotient en $\pm\infty$: factoriser par le terme de plus haut degré.
- Composée : si $u(x) \rightarrow b$ et $g(X) \rightarrow c$ quand $X \rightarrow b$, alors $g(u(x)) \rightarrow c$.
- Comparaison et gendarmes : comme pour les suites.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
- Croissances comparées : $\frac{e^x}{x^n} \rightarrow +\infty$ et $x^n e^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$; $x^n e^x \rightarrow 0$ en $-\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (nombre dérivé de exp en 0).

6 Corrigés

Exercice 1

- a)** FI « $\infty - \infty$ » : $x^3 - 4x + 1 = x^3 \left(1 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$; la parenthèse tend vers 1 et $x^3 \rightarrow +\infty$: limite $+\infty$.
- b)** Même factorisation ; en $-\infty$, $x^3 \rightarrow -\infty$ et la parenthèse tend vers 1 : limite $-\infty$.
- c)** $\frac{x^2 \left(2 + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \left(5 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{5 - \frac{1}{x}} \rightarrow \frac{2}{5}$. **d)** $\frac{x \left(4 - \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{x} \times \frac{4 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x^2}}$: la fraction tend vers 4 et $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, limite 0.
- e)** $\frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(3 + \frac{2}{x}\right)} = x \times \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{2}{x}}$: la fraction tend vers $\frac{1}{3} > 0$ et $x \rightarrow +\infty$, limite $+\infty$. **f)** $\frac{2}{x} \rightarrow 0$ et $e^{-x} \rightarrow 0$ (composée), limite 3.

Exercice 2

1. Pour $x \neq 0$: $f(x) = \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} \rightarrow 1$ en $+\infty$ comme en $-\infty$.
2. Le numérateur tend vers 3, le dénominateur vers 0 ; $x - 2 > 0$ si $x > 2$ et $x - 2 < 0$ si $x < 2$. Donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \left\langle \frac{3}{0^+} \right\rangle = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \left\langle \frac{3}{0^-} \right\rangle = -\infty$.
3. $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$, et la droite d'équation $x = 2$ comme asymptote verticale.

Exercice 3

- a)** $X = -x^2 + 1 \rightarrow -\infty$ et $e^X \rightarrow 0$: limite 0. **b)** $\frac{4x+1}{x} = 4 + \frac{1}{x} \rightarrow 4$ et $\sqrt{X} \rightarrow \sqrt{4} = 2$: limite 2. **c)** Si $x \rightarrow 0^+$, $X = -\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ et $e^X \rightarrow 0$: limite 0.
- d)** Pour $x > 0$: $2x - 1 \leq 2x + \cos x \leq 2x + 1$, donc $2 - \frac{1}{x} \leq \frac{2x + \cos x}{x} \leq 2 + \frac{1}{x}$. Les deux encadrantes tendent vers 2 : par les gendarmes, limite 2.
- e)** $\sin x \geq -1$ donc $x^2 + \sin x \geq x^2 - 1$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1) = +\infty$: par comparaison, limite $+\infty$.

Exercice 4

- a)** $+\infty$ (croissances comparées, $n = 3$). **b)** 0 (croissances comparées, $n = 2$). **c)** $e^x - x^2 = x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right)$: la parenthèse tend vers $+\infty$, limite $+\infty$. **d)** 0 (croissances comparées en $-\infty$, $n = 2$).
- e)** FI « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On factorise par e^x : $\frac{e^x (1 + xe^{-x})}{e^x (1 - xe^{-x})} = \frac{1 + xe^{-x}}{1 - xe^{-x}}$. Comme $xe^{-x} \rightarrow 0$, la limite est $\frac{1}{1} = 1$.
- f)** $\frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \times \frac{e^x - 1}{x}$ et $\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1$ (nombre dérivé de exp en 0) : limite $\frac{1}{2}$.

Exercice 5

1. En $-\infty : x + 1 \rightarrow -\infty$ et $-x \rightarrow +\infty$ donc $e^{-x} \rightarrow +\infty$ (composée). Par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. En $+\infty$: Fl « $\infty \times 0$ ». $f(x) = xe^{-x} + e^{-x}$; par croissances comparées $xe^{-x} \rightarrow 0$, et $e^{-x} \rightarrow 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses (droite $y = 0$) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

3. Avec $(uv)' = u'v + uv'$, $u(x) = x + 1$ et $v(x) = e^{-x}$ ($v'(x) = -e^{-x}$) : $f'(x) = e^{-x} - (x + 1)e^{-x} = -xe^{-x}$. Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-x$: positif sur $]-\infty ; 0]$, négatif sur $[0 ; +\infty[$. Donc f est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; +\infty[$, avec un maximum $f(0) = 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty \nearrow$	1	$\searrow 0$

4. $f(0) = 1$, donc $\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ est le taux d'accroissement de f en 0 : il tend vers $f'(0)$. Or $f'(0) = -0 \times e^0 = 0$, donc la limite vaut 0.

QCM

1. B (on factorise par $x^2 : \frac{-3+1/x^2}{1+1/x} \rightarrow -3$) · 2. C (« $\frac{1}{0^-}$ » car $x - 2 < 0$) · 3. D (croissances comparées) · 4. B (limite finie en $+\infty$) · 5. D ($\frac{1}{x} \rightarrow 0$ et $e^0 = 1$)