

Compléments sur la dérivation et convexité

Deux courbes peuvent monter de la même façon... et pourtant l'une « sourit » et l'autre « fait la moue ». Comment le voir par le calcul, et à quoi cela sert-il ?

Ce que tu vas savoir faire

- Dériver une fonction composée : $f(ax + b)$, e^u , u^n , $\sqrt{u}$
- Calculer une dérivée seconde et l'interpréter
- Étudier la convexité d'une fonction à l'aide du signe de f'' ou des variations de f'
- Déterminer un point d'inflexion et la tangente en ce point
- Lire la convexité sur la courbe de f , de f' ou de f''
- Démontrer une inégalité grâce à la convexité

À revoir avant de commencer

- Dérivées des fonctions de référence et formules $u + v$, uv , $\frac{u}{v}$ (1re)
- Équation de la tangente $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ (1re)
- Lien entre signe de f' et variations de f
- Fonction exponentielle et ses propriétés (1re)

1 Le cours

Rappels de Première

Tout ce chapitre s'appuie sur les dérivées vues en Première :

$f(x)$	k	x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$)	$\sqrt{x}$ ($x > 0$)	e^x
$f'(x)$	0	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x

$$(u + v)' = u' + v' \quad (ku)' = ku' \quad (uv)' = u'v + uv' \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Dériver une fonction composée

Beaucoup de fonctions sont construites « en cascade ». Pour calculer $\sqrt{x^2 + 1}$, on calcule d'abord $u(x) = x^2 + 1$ (la fonction « intérieure »), puis on applique la racine carrée au résultat (la fonction « extérieure »). On dit que la fonction est une **composée**.

Définition – Composée de deux fonctions

Soit u une fonction définie sur un intervalle I , à valeurs dans un intervalle J , et g une fonction définie sur J . La **composée** de u suivie de g est la fonction notée $g \circ u$ (« g rond u ») définie sur I par :

$$(g \circ u)(x) = g(u(x)).$$

Attention à l'ordre : avec $u(x) = x^2 + 1$ et $g(X) = \sqrt{X}$, on a $g \circ u(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, mais $u \circ g(x) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$ (pour $x \geq 0$) : ce n'est pas du tout la même fonction !

Théorème – Dérivée d'une composée (admis)

Si u est dérivable sur I , et g dérivable sur J (avec $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$), alors $g \circ u$ est dérivable sur I et :

$$(g(u(x)))' = u'(x) \times g'(u(x)), \quad \text{c'est-à-dire} \quad (g \circ u)' = u' \times (g' \circ u).$$

En mots : **on dérive la fonction extérieure en gardant l'intérieur, puis on multiplie par la dérivée de l'intérieur.**

Propriété – Les formules à connaître (cas particuliers du théorème)

Fonction	$g(ax + b)$	e^u	u^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	u^n ($n \in \mathbb{Z}, n < 0$)	$\sqrt{u}$
Dérivée	$a g'(ax + b)$	$u' e^u$	$n u' u^{n-1}$	$n u' u^{n-1}$ (si $u \neq 0$)	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ (si $u > 0$)

Exemples résolus – Appliquer les formules

Dériver sur $\mathbb{R}$: (a) $f(x) = (3x - 1)^4$; (b) $g(x) = e^{-x^2}$; (c) $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; (d) $k(x) = e^{2x+5}$.

Solution

(a) Forme u^4 avec $u(x) = 3x - 1$, $u'(x) = 3$: $f'(x) = 4 \times 3 \times (3x - 1)^3 = 12(3x - 1)^3$.

(b) Forme e^u avec $u(x) = -x^2$, $u'(x) = -2x$: $g'(x) = -2x e^{-x^2}$.

(c) Forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$ et $u'(x) = 2x$: $h'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

(d) Forme $g(ax + b)$ avec $g = \exp$ et $a = 2$: $k'(x) = 2 e^{2x+5}$.

Réflexe : repérer la forme (uv , $\frac{u}{v}$, e^u , u^n , $\sqrt{u}$...), écrire à part u et u' , appliquer la formule, puis **factoriser** pour étudier le signe de f' (on factorise souvent par e^u , toujours strictement positif).

La dérivée seconde

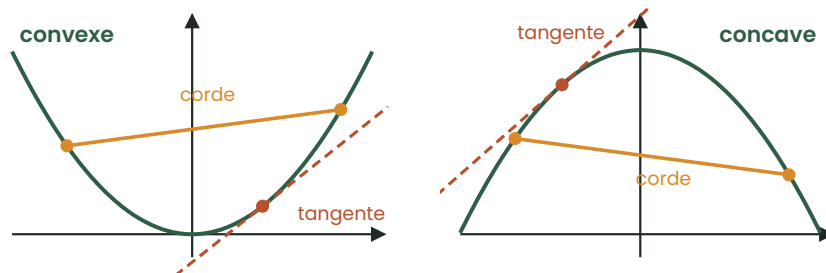
Définition – Dérivée seconde

Soit f dérivable sur I . Si sa dérivée f' est elle-même dérivable sur I , on note f'' (« f seconde ») la dérivée de f' : $f'' = (f')'$. On dit que f est **deux fois dérivable** sur I .

Exemple : si $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, alors $f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6$. En physique, si $f(t)$ est une position, $f'(t)$ est la vitesse et $f''(t)$ l'accélération.

Convexité : l'intuition

Une fonction **convexe** a une courbe « tournée vers le haut », comme un bol ou un sourire (exemple : $x \mapsto x^2$). Une fonction **concave** a une courbe « tournée vers le bas », comme une bosse (exemple : $x \mapsto -x^2$). Précisément, on compare la courbe à ses **cordes** (segments reliant deux de ses points) et à ses **tangentes**.



À gauche, une fonction convexe : la courbe est sous ses cordes et au-dessus de ses tangentes. À droite, une fonction concave : c'est l'inverse.

Définition – Fonction convexe, fonction concave

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- f est **convexe** sur I si, pour tous points A et B de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses dans I , la portion de courbe entre A et B est située **en dessous** de la corde $[AB]$.
- f est **concave** sur I si la courbe est située **au-dessus** de chacune de ses cordes.

Théorème – Caractérisations de la convexité (admis)

Soit f une fonction **deux fois dérivable** sur un intervalle I . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

f est convexe sur $I \iff f'$ est croissante sur $I \iff f'' \geq 0$ sur $I \iff \mathcal{C}_f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes.

De même : f concave $\iff f'$ décroissante $\iff f'' \leq 0 \iff \mathcal{C}_f$ en dessous de ses tangentes.

Pour comprendre : $f'(x)$ est la pente de la tangente. Si f' augmente, les tangentes se redressent quand on va vers la droite : la courbe « tourne vers le haut ». À connaître : $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0 ; +\infty[$; $x \mapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $] -\infty ; 0[$ et convexe sur $]0 ; +\infty[$.

Démonstration – Si $f'' \geq 0$, la courbe est au-dessus de ses tangentes AU PROGRAMME

Soit f deux fois dérivable sur I avec $f'' \geq 0$ sur I , et $a \in I$. La tangente en a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. On pose, pour $x \in I$:

$$g(x) = f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)].$$

Il s'agit de montrer que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ (la courbe est au-dessus de la tangente).

- g est dérivable et $g'(x) = f'(x) - f'(a)$ (car $f'(a)$ et $f(a)$ sont des constantes). Puis $g''(x) = f''(x) \geq 0$.
- Donc g' est **croissante** sur I , et $g'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$. Ainsi $g'(x) \leq 0$ pour $x \leq a$ et $g'(x) \geq 0$ pour $x \geq a$.
- g est donc décroissante puis croissante : elle admet un **minimum en a** , qui vaut $g(a) = f(a) - [0 + f(a)] = 0$.

Conclusion : pour tout $x \in I$, $g(x) \geq g(a) = 0$, c'est-à-dire $f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$: la courbe est au-dessus de sa tangente en a . Comme a est quelconque, c'est vrai pour toutes les tangentes. ■

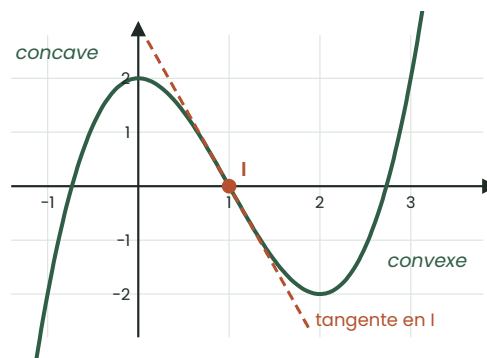
Point d'inflexion

Définition – Point d'inflexion

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe **traverse sa tangente**. En ce point, la fonction change de convexité (convexe $\rightarrow$ concave ou l'inverse).

Propriété

Si f est deux fois dérivable sur I et si f'' **s'annule en changeant de signe** en a , alors le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.



Courbe de $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$: concave sur $] -\infty; 1]$, convexe sur $[1; +\infty[$; elle traverse sa tangente au point d'inflexion $I(1; 0)$.

Méthode – Étudier la convexité d'une fonction

1. Calculer f' , puis f'' (et factoriser). **2.** Étudier le **signe de f''** (tableau de signes). **3.** Conclure : $f'' \geq 0 \rightarrow$ convexe ; $f'' \leq 0 \rightarrow$ concave ; changement de signe $\rightarrow$ point d'inflexion (calculer son ordonnée).

Lecture graphique : sur la courbe de f' , on regarde si f' **croît** (convexe) ou **décroît** (concave) ; sur la courbe de f'' , on regarde son **signe** (au-dessus ou en dessous de l'axe des abscisses).

Exemple résolu – Convexité de $f(x) = x e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

Solution

Dérivée. Produit uv avec $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$: $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$.

Dérivée seconde. Même méthode avec $u(x) = 1 - x$, $u'(x) = -1$: $f''(x) = -e^{-x} + (1 - x)(-e^{-x}) = (-1 - 1 + x)e^{-x} = (x - 2)e^{-x}$.

Signe. Comme $e^{-x} > 0$, $f''(x)$ a le signe de $x - 2$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
f		concave		convexe	

Conclusion. f est concave sur $] -\infty; 2]$, convexe sur $[2; +\infty[$, et $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse 2, de coordonnées $(2; 2e^{-2})$, avec $2e^{-2} \approx 0,27$.

Utiliser la convexité pour démontrer une inégalité

Exemple résolu – Pour tout réel $x : e^x \geq 1 + x$

Solution

Soit $f(x) = e^x$. On a $f''(x) = e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$: f est **convexe** sur $\mathbb{R}$, donc sa courbe est au-dessus de toutes ses tangentes. Tangente en 0 : $f(0) = 1$ et $f'(0) = e^0 = 1$, donc $T : y = 1 \times (x - 0) + 1 = x + 1$.

La courbe étant au-dessus de T : pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$ (avec égalité seulement pour $x = 0$).

2 Les pièges à éviter

Attention – Les erreurs classiques

- **Oublier de multiplier par u' .** $((2x + 1)^3)' = 3 \times 2 \times (2x + 1)^2 = 6(2x + 1)^2$, et non $3(2x + 1)^2$.
- **Écrire $(e^u)' = e^{u'}$.** Faux ! $(e^u)' = u' e^u$. Par exemple $(e^{3x})' = 3e^{3x}$.
- **Oublier la condition $u > 0$ pour $\sqrt{u}$.** $\sqrt{u}$ n'est pas forcément dérivable là où u s'annule : par exemple, $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.
- **Croire que $f''(a) = 0$ suffit pour un point d'inflexion.** Pour $f(x) = x^4$, $f''(x) = 12x^2$ s'annule en 0 **sans changer de signe** : pas de point d'inflexion, f est convexe sur $\mathbb{R}$.
- **Confondre convexe et croissante.** $x \mapsto e^{-x}$ est convexe ($f''(x) = e^{-x} > 0$) mais décroissante. Les variations se lisent sur le signe de f' , la convexité sur le signe de f'' .
- **Lecture graphique :** ne pas confondre la courbe de f , celle de f' et celle de f'' . Toujours lire la légende du graphique !

3 Avec Python

Ce programme approche $f''(x)$ par $\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h))}{h^2}$ avec h petit, puis **balaie** un intervalle pour repérer les changements de signe de f'' (abscisses des points d'inflexion). Test sur $f(x) = x e^{-x}$, l'exemple du cours.

```
from math import exp

def f(x):
    return x * exp(-x)

def derivee_seconde(f, x, h=0.001): # valeur approchée de f''(x)
    return (f(x + h) - 2 * f(x) + f(x - h)) / h**2

def inflexions(f, a, b, pas=0.01):
    """Balaie [a ; b] et renvoie les x où f'' change de signe"""
    liste = []
    x = a
    while x < b:
        if derivee_seconde(f, x) * derivee_seconde(f, x + pas) < 0:
            liste.append(round(x, 2))
        x = x + pas
    return liste
```

Python

```
print(inflexions(f, 0, 5)) # affiche : [2.0]
```

Le programme affiche $[2.0]$: on retrouve un point d'inflexion d'abscisse (proche de) 2. C'est une **conjecture** numérique : la preuve reste le calcul exact de f'' .

4 Exercices

Exercice 1 ★

Calculer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = (5x - 2)^3$ sur $\mathbb{R}$

2. $g(x) = e^{3x^2 - x}$ sur $\mathbb{R}$

3. $h(x) = \sqrt{4x + 1}$ sur $]-\frac{1}{4}; +\infty[$

4. $k(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 ★

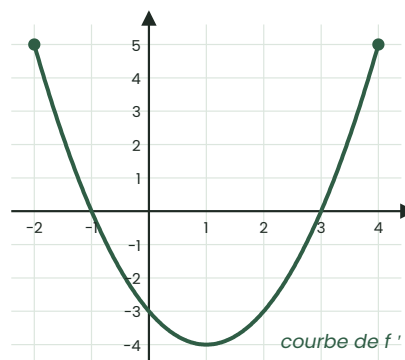
Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
2. Étudier la convexité de f .
3. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion I dont on donnera les coordonnées.
4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en I .

Exercice 3 ★★

Une fonction f est deux fois dérivable sur $[-2; 4]$. On donne ci-contre la courbe de sa **dérivée** f' : une parabole qui coupe l'axe des abscisses en -1 et 3 , de sommet $(1; -4)$.

1. Donner le signe de f' , puis le sens de variation de f sur $[-2; 4]$.
2. Donner les intervalles où f est convexe, et ceux où elle est concave.
3. La courbe de f admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, en quelle abscisse ?
4. Sachant que $f'(x) = x^2 - 2x - 3$, retrouver le résultat de la question 2 par le calcul.



Exercice 4 ★★

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. En déduire que f est concave sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 1.
3. En déduire que pour tout réel $x > 0$: $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$.

Exercice 5 ★★★ – Type bac

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

1. Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$.
2. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur exacte de son maximum.
3. Montrer que $f''(x) = xe^{-x}$, puis étudier la convexité de f . Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion A dont on précisera les coordonnées.
4. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en A .
5. En déduire que pour tout réel $x \geq 0$: $(x+2)e^{-x} \geq 2-x$. Que peut-on dire pour $x \leq 0$?

5 Teste-toi (QCM)

- 1 La dérivée de $x \mapsto e^{-2x}$ est :
A. $x \mapsto -2e^{-2x}$ B. $x \mapsto e^{-2x}$
C. $x \mapsto -2xe^{-2x}$ D. $x \mapsto 2e^{-2x}$
- 2 La dérivée de $x \mapsto \sqrt{1-x}$ sur $] -\infty ; 1[$ est :
A. $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ B. $x \mapsto -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$
C. $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ D. $x \mapsto -2\sqrt{1-x}$
- 3 Une fonction f vérifie $f''(x) = x - 1$ pour tout réel x . Alors :
A. f est convexe sur $\mathbb{R}$ B. f est concave sur $[1 ; +\infty[$
C. f est convexe sur $[1 ; +\infty[$ D. f est croissante sur $[1 ; +\infty[$
- 4 Si f est deux fois dérivable et convexe sur I , alors sur I :
A. f est croissante B. f' est croissante
C. f est positive D. la courbe est au-dessus de ses cordes
- 5 Pour $f(x) = x^4$ sur $\mathbb{R}$:
A. $\mathcal{C}_f$ a un point d'inflexion en 0 B. f'' change de signe en 0
C. f est convexe sur $\mathbb{R}$ D. f est concave sur $] -\infty ; 0]$

L'essentiel à retenir

- $(g \circ u)'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$.
- $(g(ax+b))' = a g'(ax+b)$.
- $(e^u)' = u' e^u$.
- $(u^n)' = n u' u^{n-1}$.
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ (avec $u > 0$).
- $f'' = (f')'$: la dérivée de la dérivée.
- **Convexe** : $f'' \geq 0 \iff f'$ croissante $\iff$ courbe au-dessus des tangentes (et sous les cordes).
- **Concave** : $f'' \leq 0 \iff f'$ décroissante $\iff$ courbe sous les tangentes.
- **Point d'inflexion** : f'' s'annule **en changeant de signe** ; la courbe traverse sa tangente.
- Convexité + tangente $\rightarrow$ inégalité, par exemple $e^x \geq 1+x$.

6 Corrigés

Exercice 1

1. $u = 5x - 2, u' = 5 : f'(x) = 3 \times 5 \times (5x - 2)^2 = 15(5x - 2)^2$.

2. $u = 3x^2 - x, u' = 6x - 1 : g'(x) = (6x - 1)e^{3x^2 - x}$.

3. $u = 4x + 1 > 0$ sur l'intervalle, $u' = 4 : h'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x+1}} = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$.

4. $k = u^{-2}$ avec $u = x^2 + 1 \neq 0, u' = 2x : k'(x) = -2 \times 2x \times (x^2 + 1)^{-3} = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^3}$.

Exercice 2

1. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ et $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$.

2. $f''(x) \leq 0 \iff x \leq 2$. Donc f est concave sur $] -\infty ; 2]$ et convexe sur $[2 ; +\infty[$.

3. f'' s'annule en changeant de signe en 2, et $f(2) = 8 - 24 + 18 + 1 = 3$: le point d'inflexion est $I(2 ; 3)$.

4. $f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$. Tangente : $y = -3(x - 2) + 3$, soit $y = -3x + 9$.

Exercice 3

1. $f'(x) \geq 0$ sur $[-2 ; -1]$ et sur $[3 ; 4]$, $f'(x) \leq 0$ sur $[-1 ; 3]$. Donc f est croissante sur $[-2 ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 3]$, croissante sur $[3 ; 4]$.

2. f' est décroissante sur $[-2 ; 1]$ et croissante sur $[1 ; 4]$. Donc f est **concave** sur $[-2 ; 1]$ et **convexe** sur $[1 ; 4]$.

3. f change de convexité en $x = 1$: la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse 1.

4. $f''(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$: négatif sur $[-2 ; 1]$, positif sur $[1 ; 4]$. On retrouve le résultat.

Exercice 4

1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{v}$ avec $v = \sqrt{x}, v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
D'où $f''(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{x} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$. Pour $x > 0, f''(x) < 0$: f est concave sur $]0 ; +\infty[$.

2. $f(1) = 1$ et $f'(1) = \frac{1}{2} : T : y = \frac{1}{2}(x - 1) + 1$, soit $y = \frac{x + 1}{2}$.

3. f étant concave, sa courbe est **en dessous** de ses tangentes, donc de T : pour tout $x > 0, \sqrt{x} \leq \frac{x + 1}{2}$.

Exercice 5

1. $u = x + 2, u' = 1, v = e^{-x}, v' = -e^{-x} : f'(x) = e^{-x} - (x + 2)e^{-x} = (1 - x - 2)e^{-x} = -(x + 1)e^{-x}$.

2. $e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $-(x + 1)$: positif pour $x \leq -1$, négatif pour $x \geq -1$. f est croissante sur $] -\infty ; -1]$ et décroissante sur $[-1 ; +\infty[$. Son maximum est $f(-1) = (-1 + 2)e^1 = e$.

3. $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$; avec $u = -x - 1, u' = -1 : f''(x) = -e^{-x} - (-x - 1)e^{-x} = (-1 + x + 1)e^{-x} = xe^{-x}$. Elle a le signe de x : f est concave sur $] -\infty ; 0]$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$. f'' s'annule en changeant de signe en 0, et $f(0) = 2$: point d'inflexion $A(0 ; 2)$.

4. $f'(0) = -1 : T : y = -1 \times (x - 0) + 2$, soit $y = -x + 2$.

5. Sur $[0 ; +\infty[$, f est convexe, donc sa courbe est au-dessus de ses tangentes en des points de cet intervalle, en particulier de T (tangente en 0) : $(x + 2)e^{-x} \geq 2 - x$ pour $x \geq 0$. Sur $] -\infty ; 0]$, f est concave, donc la courbe est en dessous de T : $(x + 2)e^{-x} \leq 2 - x$ pour $x \leq 0$.

QCM

1. A (forme $g(ax + b)$ avec $a = -2$) · 2. B ($u = 1 - x, u' = -1$, donc $\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$) · 3. C ($f''(x) \geq 0$ sur $[1 ; +\infty[$; D est faux : c'est f' qui est croissante, pas forcément f) · 4. B (D est faux : la courbe est **sous** ses cordes) · 5. C ($f''(x) = 12x^2 \geq 0$ sans changement de signe)