

La fonction logarithme népérien

Combien d'années faut-il pour doubler un capital placé à 5 % ? Pour « défaire » une exponentielle et faire descendre l'inconnue de l'exposant, il faut un nouvel outil : le logarithme.

Ce que tu vas savoir faire

- Définir $\ln$ comme réciproque de l'exponentielle et passer de $y = \ln x$ à $x = e^y$
- Utiliser les propriétés algébriques ($\ln(ab)$, $\ln \frac{a}{b}$, $\ln(a^n)$...) pour simplifier une expression
- Résoudre des équations et inéquations avec $\ln$ et $\exp$, y compris un seuil $q^n \geq s$
- Dériver $\ln$ et $\ln(u)$, étudier une fonction contenant un logarithme
- Connaître les limites de $\ln$ et les croissances comparées

À revoir avant de commencer

- Fonction exponentielle : propriétés algébriques, variations, limites
- Dérivée de e^u et d'un quotient
- Croissance comparée de x^n et e^x (fiche 3)
- Suites géométriques q^n
- Théorème des valeurs intermédiaires (fiche 5)

1 Le cours

L'idée : « défaire » l'exponentielle

Tu sais résoudre $e^x = 1$ (solution $x = 0$) ou $e^x = e^3$ (solution $x = 3$). Mais que faire de $e^x = 5$? On sait qu'une solution existe : la fonction exponentielle est **continue** et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$, et elle prend toutes les valeurs de $]0; +\infty[$ (limites 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$). D'après le théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone), l'équation $e^x = 5$ a **une unique solution**. On lui donne un nom : $\ln 5$.

Définition – Logarithme népérien

Pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, appelée **logarithme népérien de a** et notée $\ln a$ (ou $\ln(a)$).

La fonction $\ln : x \mapsto \ln x$ est définie sur $]0; +\infty[$: c'est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle.

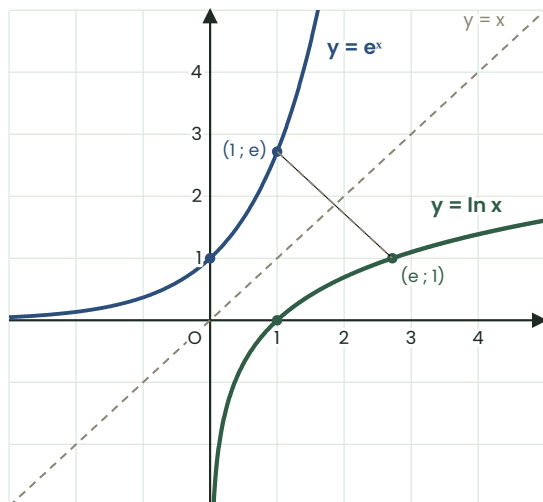
Propriétés – Conséquences immédiates

- Pour tout $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$: $y = \ln x \iff x = e^y$.
- Pour tout $x > 0$: $e^{\ln x} = x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln(e^x) = x$.
- $\ln 1 = 0$ (car $e^0 = 1$) et $\ln e = 1$ (car $e^1 = e$).

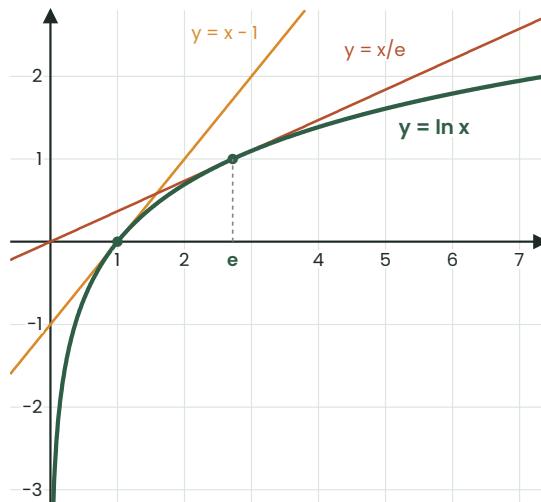
Remarque – Attention au domaine

$\ln x$ n'existe **que si** $x > 0$: $\ln 0$ et $\ln(-2)$ n'ont aucun sens, car une exponentielle n'est jamais nulle ni négative. Avant tout calcul, on commence donc par chercher **où l'expression est définie**.

Les courbes de $\ln$ et $\exp$



Les courbes de $\exp$ et de $\ln$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$: le point $(a; b)$ est sur l'une si et seulement si $(b; a)$ est sur l'autre.



La courbe de $\ln$ passe par $(1; 0)$ et $(e; 1)$. Elle reste sous ses tangentes, par exemple en 1 ($y = x - 1$) et en e ($y = x/e$, qui passe par l'origine).

La propriété fondamentale : $\ln$ transforme les produits en sommes

Théorème – Relation fonctionnelle

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Démonstration AU PROGRAMME

D'une part, $e^{\ln(ab)} = ab$. D'autre part, avec la propriété de l'exponentielle $e^u e^v = e^{u+v}$:

$$e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = a \times b.$$

Donc $e^{\ln(ab)} = e^{\ln a + \ln b}$. Or la fonction exponentielle est strictement croissante, donc deux nombres qui ont la même exponentielle sont égaux : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Propriétés – Conséquences (pour $a > 0, b > 0, n \in \mathbb{Z}$)

- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

Justification rapide : $\ln b + \ln \frac{1}{b} = \ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln 1 = 0$; puis $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$. Pour a^n ($n \geq 1$), on applique n fois la relation (ou une récurrence) ; enfin $2 \ln \sqrt{a} = \ln(\sqrt{a}^2) = \ln a$.

Exemple résolu – Simplifier des expressions

Simplifier $A = \ln 50 - 2 \ln 5 + \ln \frac{1}{2}$ et $B = \ln(e^2) - \ln \sqrt{e} + e^{\ln 3}$.

Solution

$$A = \ln 50 - \ln(5^2) + \ln \frac{1}{2} = \ln \left(\frac{50}{25} \times \frac{1}{2} \right) = \ln 1 = 0.$$

$$B = 2 - \frac{1}{2} \ln e + 3 = 2 - \frac{1}{2} + 3 = \frac{9}{2} \text{ (on a utilisé } \ln(e^x) = x, \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a \text{ et } e^{\ln x} = x \text{).}$$

Équations et inéquations

Propriété – ln est strictement croissante

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $\ln a = \ln b \iff a = b$ et $\ln a < \ln b \iff a < b$.

En particulier : $\ln x > 0 \iff x > 1$ et $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$.

Méthode – Résoudre une équation ou une inéquation avec ln

1. **Domaine** : écrire les conditions pour que chaque $\ln(\dots)$ existe (ce qui est dedans doit être > 0).
2. **Se ramener** à $\ln A = \ln B$ ou $\ln A < \ln B$ (en regroupant avec les propriétés algébriques), puis **enlever les ln** : $A = B$ ou $A < B$.
3. Pour faire « descendre » une inconnue d'un exposant : $e^X = k \iff X = \ln k$ (si $k > 0$).
4. **Conclure** en ne gardant que les solutions situées dans le domaine.

Exemple résolu – Trois résolutions

Résoudre : a) $e^x = 5$; b) $\ln(2x - 1) = \ln(x + 3)$; c) $\ln x \leq 2$.

Solution

a) $5 > 0$, donc $e^x = 5 \iff x = \ln 5 \approx 1,609$. $S = \{\ln 5\}$.

b) Domaine : $2x - 1 > 0$ et $x + 3 > 0$, soit $x > \frac{1}{2}$ et $x > -3$, c'est-à-dire $x > \frac{1}{2}$. Sur ce domaine : $\ln(2x - 1) = \ln(x + 3) \iff 2x - 1 = x + 3 \iff x = 4$. Comme $4 > \frac{1}{2}$: $S = \{4\}$.

c) Domaine : $x > 0$. On écrit $2 = \ln(e^2)$: $\ln x \leq \ln(e^2) \iff x \leq e^2$. Donc $S =]0 ; e^2]$.

Application : résoudre $q^n \geq s$ (problèmes de seuil)

Pour trouver à partir de quand une suite géométrique dépasse un seuil, on applique ln (qui conserve l'ordre) puis on utilise $\ln(q^n) = n \ln q$.

Exemple résolu – Doubler un capital

Un capital de 1 000 € est placé à 5 % par an (intérêts composés). Au bout de combien d'années aura-t-il doublé ?

Solution

Après n années, le capital vaut $1\,000 \times 1,05^n$. On cherche le plus petit entier n tel que $1\,000 \times 1,05^n \geq 2\,000$, soit $1,05^n \geq 2$.

La fonction $\ln$ est strictement croissante : $1,05^n \geq 2 \iff \ln(1,05^n) \geq \ln 2 \iff n \ln 1,05 \geq \ln 2$.

Comme $1,05 > 1$, on a $\ln 1,05 > 0$: on divise **sans changer le sens** : $n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,05} \approx 14,2$.

Le capital aura doublé au bout de **15 ans**.

Remarque – Si $0 < q < 1$

Alors $\ln q < 0$ et diviser par $\ln q$ **inverse le sens** de l'inégalité. Par exemple : $0,8^n < 0,01 \iff n \ln 0,8 < \ln 0,01 \iff n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,6$.

Étude de la fonction $\ln$

Théorème – Dérivée

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Démonstration (la dérivabilité étant admise) AU PROGRAMME

Pour tout $x > 0$, on a $e^{\ln x} = x$. On dérive les deux membres. À gauche, on reconnaît e^u avec $u = \ln$, dont la dérivée est $u'e^u$:

$$\ln'(x) \times e^{\ln x} = 1 \quad \text{donc} \quad \ln'(x) \times x = 1 \quad \text{donc} \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Propriété – Variations et limites

Comme $\frac{1}{x} > 0$ sur $]0; +\infty[$, la fonction $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$. De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

L'axe des ordonnées est **asymptote verticale** à la courbe (dans le tableau de variations, la double barre rappelle que $\ln$ n'est pas définie en 0).

Justification de la limite en $+\infty$: pour tout réel A , dès que $x > e^A$, on a $\ln x > A$ (car $\ln$ est croissante). En 0^+ : $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$.

Tableau de variations de la fonction $\ln$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$		+					
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Théorème – Dérivée de $\ln(u)$

Si u est dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I , alors $\ln(u)$ est dérivable sur I et :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}.$$

Comme $u > 0$, $\frac{u'}{u}$ a le signe de u' : $\ln(u)$ a les mêmes variations que u sur I .

Exemple résolu – Dériver $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

Solution

Le discriminant de $x^2 + x + 1$ vaut $1 - 4 = -3 < 0$: ce trinôme est toujours strictement positif, donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Avec $u(x) = x^2 + x + 1$ et $u'(x) = 2x + 1$:

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

Le dénominateur est positif : $f'(x)$ a le signe de $2x + 1$. Donc f est décroissante sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}]$ et croissante sur $[-\frac{1}{2} ; +\infty[$.

Remarque – Concavité et tangente en 1

$\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$: la fonction $\ln$ est **concave**, sa courbe est sous ses tangentes. La tangente en 1 a pour équation $y = \ln'(1)(x - 1) + \ln 1 = x - 1$, d'où l'inégalité très utile : $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

Limites de référence et croissances comparées

Le logarithme tend vers $+\infty$, mais **très lentement** : $\ln(1\,000\,000) \approx 13,8$ seulement ! Face à x , il « perd » toujours.

Théorème – Croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$.

Démonstration de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ **AU PROGRAMME**

On pose $X = \ln x$, c'est-à-dire $x = e^X$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $X = \ln x \rightarrow +\infty$. Alors :

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{e^X} = \frac{1}{\frac{e^X}{X}}.$$

Par croissance comparée (fiche 3), $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, donc son inverse tend vers 0. Par composition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Démonstration de $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ **AU PROGRAMME**

On pose $X = \frac{1}{x}$, c'est-à-dire $x = \frac{1}{X}$. Quand $x \rightarrow 0^+$, $X \rightarrow +\infty$. Alors :

$$x \ln x = \frac{1}{X} \ln \left(\frac{1}{X} \right) = \frac{1}{X} \times (-\ln X) = -\frac{\ln X}{X}.$$

D'après la démonstration précédente, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$. Par composition : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$.

Propriété – Une limite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Démonstration

On reconnaît un taux d'accroissement de $\ln$ en 1 : $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{(1+x) - 1}$. Comme $\ln$ est dérivable en 1, ce taux tend vers $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$ quand $x \rightarrow 0$.

Conséquence pratique : pour h proche de 0, $\ln(1+h) \approx h$. C'est l'idée de l'algorithme de Briggs ci-dessous.

Méthode – Lever une forme indéterminée avec $\ln$

On **factorise par le terme qui l'emporte** pour faire apparaître une croissance comparée. Exemple : en $+\infty$, $x - \ln x$ est une forme « $\infty - \infty$ ». On écrit $x - \ln x = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)$. Or $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, donc la parenthèse tend vers 1 et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = +\infty$.

2 Les pièges à éviter

Attention – Les erreurs classiques

- **Oublier le domaine.** Dans $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 6$, on trouve $x^2 - x - 6 = 0$, soit $x = 3$ ou $x = -2$. Mais $\ln(-2)$ n'existe pas : seule $x = 3$ convient (voir exercice 3).
- **Inventer des formules.** $\ln(a + b) \neq \ln a + \ln b$ et $\ln(a) \times \ln(b) \neq \ln(ab)$. De même $\frac{\ln a}{\ln b} \neq \ln\left(\frac{a}{b}\right)$: par exemple $\frac{\ln 8}{\ln 2} = 3$ alors que $\ln 4 \approx 1,39$.
- **Écrire $\ln(-3)$ ou $\ln 0$.** Le logarithme n'est défini que pour des nombres **strictement positifs**.
- **Ne pas changer le sens** en divisant par $\ln q$ quand $0 < q < 1$ (car alors $\ln q < 0$).
- **Oublier u'** : la dérivée de $\ln(3x + 1)$ est $\frac{3}{3x + 1}$, et non $\frac{1}{3x + 1}$.
- **Confondre $\ln(x^2)$ et $(\ln x)^2$** : pour $x = e$, le premier vaut 2 et le second vaut 1.

3 Avec Python

Algorithme de Briggs. En prenant n fois la racine carrée de a , on obtient $b = a^{1/2^n}$, un nombre très proche de 1. Alors $\ln a = 2^n \ln b$ et, comme $\ln(1 + h) \approx h$, on a $\ln b \approx b - 1$. D'où $\ln a \approx 2^n(b - 1)$. On y ajoute un algorithme de recherche de seuil.

```
from math import sqrt, log

def briggs(a, n):
    """Valeur approchée de ln(a), pour a > 0, par la méthode de Briggs"""
    for k in range(n):
        a = sqrt(a)          # n racines carrées : a devient très proche de 1
    return 2**n * (a - 1)    # ln(1 + h) ≈ h quand h est proche de 0

for n in [5, 10, 20]:
    print(n, briggs(2, n))
print("ln(2) =", log(2))

def seuil(q, s):
    """Plus petit entier n tel que q**n < s (avec 0 < q < 1 et s > 0)"""
    n = 0
    u = 1
    while u >= s:
        u = u * q
        n = n + 1
    return n

print(seuil(0.8, 0.01))

# Affichage obtenu :
# 5 0.7007087569317321
# 10 0.6933818297000016
# 20 0.6931474097073078
# ln(2) = 0.6931471805599453
# 21
```

Python

Avec $n = 20$, on obtient déjà 6 décimales exactes de $\ln 2 \approx 0,693\,147$. La fonction seuil confirme le calcul de la remarque précédente : $0,8^n < 0,01$ à partir de $n = 21$.

4 Exercices

Exercice 1 ★

- Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$: $a = \ln 72$; $b = \ln \frac{1}{16}$; $c = \ln \sqrt{18}$; $d = \ln 24 - 2 \ln 6$.
- Simplifier : $E = e^{\ln 5 + 2 \ln 3}$ et $F = \ln \left(\frac{e^3}{\sqrt{e}} \right)$.

Exercice 2 ★

Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $\ln x = 3$; b) $e^{2x+1} = 7$; c) $\ln(3x - 2) = \ln(x + 4)$; d) $\ln(x + 1) \leq 0$.

Exercice 3 ★★

Résoudre : a) $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$ (on pourra poser $X = \ln x$) ; b) $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 6$.

Exercice 4 ★★

- Calculer la dérivée de : $f(x) = x \ln x - x$ sur $]0 ; +\infty[$; $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$; $h(x) = \ln(2x + 1)$ sur $]-\frac{1}{2} ; +\infty[$.
- Soit $k(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$. Déterminer les limites de k en 0 et en $+\infty$, étudier ses variations, puis en déduire que pour tout $x > 0$: $\ln x \leq \frac{x}{e}$.

Exercice 5 ★★

Un patient reçoit une dose de 100 mg d'un médicament. Chaque heure, la quantité présente dans le sang diminue de 20 %. On note Q_n la quantité (en mg) au bout de n heures.

- Exprimer Q_n en fonction de n .
- Déterminer, par le calcul, au bout de combien d'heures la quantité devient inférieure à 1 mg.

Exercice 6 – Type bac ★★★

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe.

- Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement.
- Montrer que $f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$, puis dresser le tableau de variations de f .
- Résoudre $f(x) = 0$ et en déduire le signe de $f(x)$.
- Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse e^{-1} .
- Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet exactement deux solutions $\alpha < \beta$ sur $]0 ; +\infty[$, et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} .

5 Teste-toi (QCM)

- 1 Le nombre $\ln(e^3) + e^{\ln 2}$ est égal à :
 A. $\ln 5$ B. 6
 C. e^5 D. 5
- 2 $\ln 8 - \ln 2$ est égal à :
 A. $\ln 6$ B. 3
 C. $2 \ln 2$ D. $\ln 16$
- 3 La dérivée de $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est :
 A. $\frac{2x}{x^2 + 1}$ B. $\frac{1}{x^2 + 1}$
 C. $2x \ln(x^2 + 1)$ D. $\frac{2}{x}$
- 4 L'ensemble des solutions de $\ln x < 1$ est :
 A. $] -\infty ; e[$ B. $]0 ; e[$
 C. $]0 ; 1[$ D. $]e ; +\infty[$
- 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ vaut :
 A. $+\infty$ B. 1
 C. 0 D. n'existe pas
- 6 Le plus petit entier n tel que $2^n > 1\,000$ est :
 A. 9 B. 10
 C. 11 D. 500

L'essentiel à retenir

- Pour $x > 0$: $y = \ln x \iff x = e^y$
- $e^{\ln x} = x$ ($x > 0$) ; $\ln(e^x) = x$; $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$; $\ln(a^n) = n \ln a$; $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$
- $\ln a < \ln b \iff a < b$; $\ln x > 0 \iff x > 1$
- Toujours commencer par le **domaine** : ce qui est dans $\ln$ doit être > 0
- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ (avec $u > 0$)
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\ln x \leq x - 1$
- Seuil : $q^n \geq s \iff n \ln q \geq \ln s$, puis diviser par $\ln q$ (sens inversé si $\ln q < 0$)

6 Corrigés

Exercice 1

1. $72 = 2^3 \times 3^2$ donc $a = 3 \ln 2 + 2 \ln 3$. $b = -\ln 16 = -\ln(2^4) = -4 \ln 2$. $18 = 2 \times 3^2$ donc $c = \frac{1}{2} \ln 18 = \frac{1}{2} \ln 2 + \ln 3$.
 $d = \ln(2^3 \times 3) - 2 \ln(2 \times 3) = 3 \ln 2 + \ln 3 - 2 \ln 2 - 2 \ln 3 = \ln 2 - \ln 3$.
 2. $\ln 5 + 2 \ln 3 = \ln 5 + \ln 9 = \ln 45$, donc $E = e^{\ln 45} = 45$. $F = \ln(e^3) - \ln(e^{1/2}) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Exercice 2

- a) Domaine $x > 0$; $\ln x = 3 \iff x = e^3$. $S = \{e^3\}$.
 b) $7 > 0$: $e^{2x+1} = 7 \iff 2x+1 = \ln 7 \iff x = \frac{\ln 7 - 1}{2}$. $S = \{\frac{\ln 7 - 1}{2}\}$ ($\approx 0,47$).
 c) Domaine: $3x - 2 > 0$ et $x + 4 > 0$, soit $x > \frac{2}{3}$. Alors $3x - 2 = x + 4 \iff x = 3$, et $3 > \frac{2}{3}$. $S = \{3\}$.
 d) Domaine: $x > -1$. $\ln(x+1) \leq 0 = \ln 1 \iff x+1 \leq 1 \iff x \leq 0$. $S =]-1; 0]$.

Exercice 3

- a) Domaine $x > 0$. Avec $X = \ln x$: $X^2 - X - 2 = 0$, $\Delta = 1 + 8 = 9$, d'où $X = \frac{1-3}{2} = -1$ ou $X = \frac{1+3}{2} = 2$.
 Donc $\ln x = -1$ ou $\ln x = 2$: $S = \{e^{-1}; e^2\}$.
 b) Domaine: $x > 0$ et $x - 1 > 0$, soit $x > 1$. Sur ce domaine: $\ln(x(x-1)) = \ln 6 \iff x^2 - x - 6 = 0 \iff (x-3)(x+2) = 0$. On trouve $x = 3$ ou $x = -2$; seule 3 est dans le domaine. $S = \{3\}$.

Exercice 4

1. $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$. $g'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. $h'(x) = \frac{2}{2x+1}$.
 2. En 0^+ : $\ln x \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, donc $k(x) = \ln x \times \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$. En $+\infty$: $k(x) \rightarrow 0$ (croissance comparée).
 $k'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, du signe de $1 - \ln x$: positif si $x < e$, négatif si $x > e$. Donc k est croissante sur $]0; e]$, décroissante sur $[e; +\infty[$, avec un maximum $k(e) = \frac{1}{e}$.
 Ainsi, pour tout $x > 0$: $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$, et en multipliant par $x > 0$: $\ln x \leq \frac{x}{e}$.

Exercice 5

1. Diminuer de 20 % revient à multiplier par 0,8: (Q_n) est géométrique de raison 0,8 et $Q_n = 100 \times 0,8^n$.
 2. $Q_n < 1 \iff 0,8^n < 0,01 \iff n \ln 0,8 < \ln 0,01 \iff n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$ (sens inversé car $\ln 0,8 < 0$). Or $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,6$. Vérification: $Q_{20} \approx 1,15$ et $Q_{21} \approx 0,92$. C'est au bout de **21 heures**.

Exercice 6

1. En 0^+ : $1 + \ln x \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, donc $f(x) = (1 + \ln x) \times \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$: l'axe des ordonnées est asymptote verticale. En $+\infty$: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0 + 0 = 0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale en $+\infty$.

2. $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$. Du signe de $-\ln x$: positif sur $]0; 1[$, nul en 1, négatif sur $]1; +\infty[$. Donc f est croissante sur $]0; 1]$ (de $-\infty$ à $f(1) = 1$) puis décroissante sur $[1; +\infty[$ (de 1 vers 0).

3. $f(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \iff x = e^{-1}$. Comme $x > 0$, $f(x)$ a le signe de $1 + \ln x$: $f(x) < 0$ sur $]0; e^{-1}[$ et $f(x) > 0$ sur $]e^{-1}; +\infty[$.

4. $f(e^{-1}) = 0$ et $f'(e^{-1}) = \frac{-(-1)}{e^{-2}} = e^2$. Donc $T : y = e^2(x - e^{-1})$, soit $y = e^2x - e$.

5. Sur $]0; 1]$, f est continue et strictement croissante, de $-\infty$ à 1 ; comme $\frac{1}{2} \in]-\infty; 1[$, le TVI (cas strictement monotone) donne une unique solution α . Sur $[1; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante de 1 vers 0 (limite non atteinte), et $\frac{1}{2} \in]0; 1[$: une unique solution β . Il y a donc exactement deux solutions. À la calculatrice : $f(0,46) \approx 0,48 < 0,5$ et $f(0,47) \approx 0,52 > 0,5$, donc $0,46 < \alpha < 0,47$; $f(5,35) \approx 0,5004 > 0,5$ et $f(5,36) \approx 0,4998 < 0,5$, donc $5,35 < \beta < 5,36$.

QCM

1. D ($3 + 2 = 5$) · 2. C ($\ln \frac{8}{2} = \ln 4 = 2 \ln 2$) · 3. A ($\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 1$) · 4. B (domaine $x > 0$ et $x < e$) · 5. C (croissance comparée) · 6. B ($2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$; ou $n > \frac{\ln 1000}{\ln 2} \approx 9,97$)