

Les fonctions sinus et cosinus

Marées, saisons, son, courant alternatif : tout ce qui se répète peut se décrire avec deux fonctions. Comment les dériver, les tracer et résoudre des équations avec elles ?

Ce que tu vas savoir faire

- Utiliser le cercle trigonométrique et les valeurs remarquables pour calculer des cosinus et des sinus
- Connaître la parité, la périodicité, les variations et les courbes de $\cos$ et $\sin$
- Dériver $\sin$, $\cos$, $\cos(ax + b)$, $\sin(u)$ et étudier une fonction trigonométrique simple
- Démontrer et utiliser $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- Résoudre $\cos x = a$, $\sin x = a$ et une inéquation $\cos x \geq a$ sur un intervalle

À revoir avant de commencer

- Cercle trigonométrique, radians, valeurs remarquables (1re)
- Nombre dérivé comme limite d'un taux d'accroissement
- Dérivées d'un produit, d'un quotient, de $f(ax + b)$ et de u^2 (fiche 4)
- Parité et symétries d'une courbe
- Équations du second degré

1 Le cours

Rappels : le cercle trigonométrique

Tu as rencontré le cosinus et le sinus en 1^{re} grâce au cercle trigonométrique. On « enroule » la droite des réels autour de ce cercle : à chaque réel x correspond un point $M(x)$ du cercle, et ses deux coordonnées définissent $\cos x$ et $\sin x$. En Terminale, on étudie ces deux nombres comme des **fonctions** de x : dérivées, variations, courbes, équations.

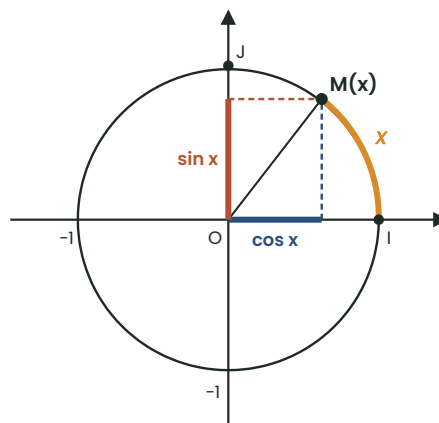
Définition – Cosinus et sinus d'un réel

Dans un repère orthonormé $(O ; I, J)$, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Si $M(x)$ est le point du cercle associé au réel x (longueur d'arc x depuis I), alors :

$$M(x) (\cos x ; \sin x).$$

Les angles sont mesurés en **radians** : un tour complet mesure 2π .



$\cos x$ est l'abscisse de $M(x)$, $\sin x$ son ordonnée.

Propriétés – À connaître (pour tout réel x)

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (Pythagore)
- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Exemple résolu – Valeurs exactes

Calculer $\cos \frac{2\pi}{3}$, $\sin \frac{5\pi}{6}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\cos \frac{17\pi}{3}$.

Solution

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \quad \sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \quad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{17\pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3} = 3 \times 2\pi - \frac{\pi}{3}. \text{ On enlève 3 tours : } \cos \frac{17\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Parité et périodicité

Définitions

- Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est **périodique de période T** ($T > 0$) si, pour tout x : $f(x + T) = f(x)$. Sa courbe se répète alors à l'identique tous les T (invariance par translation).
- f est **paire** si $f(-x) = f(x)$ pour tout x : sa courbe est symétrique par rapport à l'**axe des ordonnées**.
- f est **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x : sa courbe est symétrique par rapport à l'**origine O** .

Propriété

Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π -**périodiques**. La fonction $\cos$ est **paire** ; la fonction $\sin$ est **impaire**.

Remarque – Un intervalle d'étude suffit

Grâce à la périodicité, il suffit d'étudier $\cos$ et $\sin$ sur un intervalle de longueur 2π , par exemple $[-\pi; \pi]$. Grâce à la parité, on peut même se contenter de $[0; \pi]$, puis compléter par symétrie (axe des ordonnées pour $\cos$, origine pour $\sin$), puis par translation.

Dérivées et variations

Théorème – Dérivées (admis)

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\sin'(x) = \cos x \qquad \cos'(x) = -\sin x.$$

Remarque – Retenir le signe

Au voisinage de 0, cos « redescend » depuis son maximum 1 quand x augmente : sa dérivée doit être négative pour x un peu plus grand que 0, c'est le cas de $-\sin x$. Et sin monte en 0 avec une pente $\cos 0 = 1$.

Propriété – Une limite remarquable

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Démonstration – avec le nombre dérivé

Comme $\sin 0 = 0$: $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$. C'est le **taux d'accroissement** de sin entre 0 et x . Puisque sin est dérivable en 0, ce taux tend vers $\sin'(0) = \cos 0 = 1$.

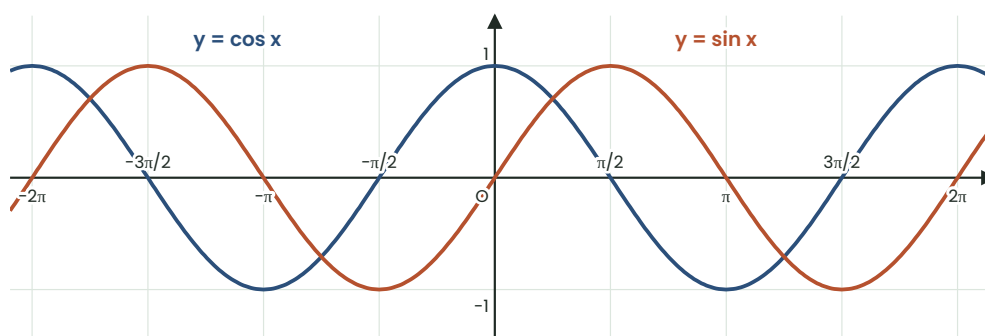
De même, $\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0}$ tend vers $\cos'(0) = -\sin 0 = 0$.

Interprétation : pour x proche de 0, $\sin x \approx x$ (la tangente en O à la courbe de sin est la droite $y = x$).

Variations sur $[0; \pi]$. Sur $[0; \pi]$, $\sin x \geq 0$, donc $\cos'(x) = -\sin x \leq 0$: cos est décroissante. Et $\sin'(x) = \cos x$ est positif sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et négatif sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos'(x) = -\sin x$	0	–	–1	–	0
cos	1	$\searrow$	0	$\searrow$	–1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x) = \cos x$	1	+	0	–	–1
sin	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Les courbes de cos (en bleu, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées) et de sin (en rouge, symétrique par rapport à l'origine). Elles se répètent tous les 2π ; la courbe de cos est celle de sin décalée de $\frac{\pi}{2}$ vers la gauche, car $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

Dériver $\cos(ax + b)$ et $\sin(u)$

Propriété – Dérivées de fonctions composées

Pour des réels a et b :

$$(\cos(ax + b))' = -a \sin(ax + b) \quad (\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b).$$

Plus généralement, si u est dérivable sur un intervalle I :

$$(\cos u)' = -u' \sin u \quad (\sin u)' = u' \cos u.$$

Exemple résolu – Quatre dérivées

Dériver sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; $g(x) = \sin(x^2)$; $h(x) = x \sin x$; $k(x) = \sin^2 x$.

Solution

$$f'(x) = -3 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (a = 3) ; \quad g'(x) = 2x \cos(x^2) \quad (u = x^2, u' = 2x).$$

$$h = uv \text{ avec } u = x, v = \sin x : h'(x) = 1 \times \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x.$$

$$k = u^2 \text{ avec } u = \sin x : k'(x) = 2u'u = 2 \cos x \sin x.$$

Remarque – Période de $\cos(ax + b)$

Pour $a > 0$, la fonction $x \mapsto \cos(ax + b)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{a}$ (même chose pour $\sin$). Par exemple, $x \mapsto \cos(2x)$ est π -périodique : $\cos(2(x + \pi)) = \cos(2x + 2\pi) = \cos(2x)$.

Résoudre $\cos x = a$ et $\sin x = a$

Méthode – Équations trigonométriques

1. Si $a < -1$ ou $a > 1$: **aucune solution**.
2. Sinon, trouver un réel α (souvent une valeur remarquable) tel que $\cos \alpha = a$ (ou $\sin \alpha = a$).
3. Utiliser, pour $k \in \mathbb{Z}$:
 $\cos x = \cos \alpha \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi ;$
 $\sin x = \sin \alpha \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi.$
4. Ne garder que les solutions de l'intervalle demandé (en testant quelques valeurs de k). Un dessin du cercle aide beaucoup !

Exemple résolu – Trois équations

Résoudre : a) $\cos x = \frac{1}{2}$ sur $] -\pi ; \pi]$; b) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $] -\pi ; \pi]$; c) $\cos(2x) = 0$ sur $[0 ; \pi]$.

Solution

a) $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Dans $] -\pi ; \pi]$ (avec $k = 0$) : $S = \left\{ -\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3} \right\}$.

b) $\sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$. Dans $] -\pi ; \pi]$: $-\frac{\pi}{4}$ ($k = 0$) et $\frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$ ($k = -1$). $S = \left\{ -\frac{3\pi}{4} ; -\frac{\pi}{4} \right\}$.

c) $\cos(2x) = \cos \frac{\pi}{2} \iff 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. Dans $[0 ; \pi]$: $S = \left\{ \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} \right\}$.

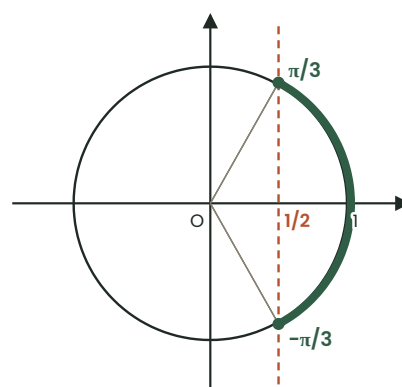
Exemple résolu – Une inéquation

Résoudre $\cos x \geq \frac{1}{2}$ sur $[-\pi ; \pi]$.

Solution

On trace la droite verticale d'abscisse $\frac{1}{2}$: elle coupe le cercle aux points associés à $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$. Les points d'abscisse $\geq \frac{1}{2}$ sont ceux de l'arc situé **à droite** de cette droite (en vert).

Donc $S = \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3} \right]$.



L'arc vert correspond à $\cos x \geq \frac{1}{2}$.

Étudier une fonction trigonométrique

Exemple résolu – Démontrer que $\sin x \leq x$ pour $x \geq 0$

Solution

Soit $f(x) = \sin x - x$ sur $[0 ; +\infty[$. Alors $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$, car $\cos x \leq 1$. Donc f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$, et pour tout $x \geq 0$: $f(x) \leq f(0) = 0$, c'est-à-dire $\sin x \leq x$.

Méthode – Étudier le signe d'une dérivée trigonométrique

On se ramène à un intervalle d'étude (périodicité, parité), puis on étudie le signe de la dérivée en résolvant une **inéquation** du type $\cos x \geq a$ ou $\sin x \geq a$ à l'aide du cercle. Si la dérivée est un produit, on fait un **tableau de signes** (voir l'exercice 5).

2 Les pièges à éviter

Attention – Les erreurs classiques

- **Calculatrice en degrés.** En analyse, on travaille toujours en **radians** : vérifie le mode de ta calculatrice (en degrés, $\sin 1$ donnerait 0,017 au lieu de 0,841).
- **Se tromper de signe :** $\cos' = -\sin$ mais $\sin' = +\cos$.
- **Oublier le facteur a :** la dérivée de $\cos(3x)$ est $-3 \sin(3x)$, pas $-\sin(3x)$.
- **Oublier une famille de solutions :** $\cos x = \frac{1}{2}$ a **deux** solutions par tour ($\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$), pas une seule.
- **Inventer des formules :** $\sin(2x) \neq 2 \sin x$ et $\cos(a+b) \neq \cos a + \cos b$ (essaie avec $x = \frac{\pi}{2}$: $\sin \pi = 0$ mais $2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$).
- **Confondre les limites :** $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$, mais $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ (car $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ pour $x > 0$).

3 Avec Python

Deux petites expériences : observer numériquement la limite de $\frac{\sin x}{x}$ en 0, puis obtenir une valeur approchée de π en cherchant par **dichotomie** (fiche 5) le zéro de $\cos$ situé entre 1 et 2, qui vaut $\frac{\pi}{2}$. Le module `math` travaille en radians.

```
from math import cos, sin, pi

# 1) sin(x)/x quand x se rapproche de 0
for x in [1, 0.1, 0.01, 0.001]:
    print(x, sin(x) / x)

# 2) Dichotomie : cos s'annule une seule fois sur [1 ; 2], en pi/2
def dichotomie(a, b, precision):
    while b - a > precision:
        m = (a + b) / 2
        if cos(a) * cos(m) <= 0: # changement de signe dans [a ; m]
            b = m
        else: # sinon il est dans [m ; b]
            a = m
    return a, b

a, b = dichotomie(1, 2, 1e-6)
print(2 * a, 2 * b)
print(pi)

# Affichage obtenu :
# 1 0.8414709848078965
# 0.1 0.9983341664682815
# 0.01 0.9999833334166665
# 0.001 0.9999998333333416
# 3.141592025756836 3.1415939331054688
# 3.141592653589793
```

Python

Le rapport $\frac{\sin x}{x}$ se rapproche bien de 1, et l'encadrement obtenu, $3,141\,592\,0 < \pi < 3,141\,594\,0$, est cohérent avec $\pi \approx 3,141\,592\,65$.

4 Exercices

Exercice 1 ★

1. Donner la valeur exacte de : $\cos \frac{5\pi}{6}$; $\sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right)$; $\cos \frac{11\pi}{4}$; $\sin \frac{7\pi}{6}$.

2. On sait que $\sin x = \frac{3}{5}$ et que $x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi \right]$. Calculer $\cos x$.

Exercice 2 ★

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$: $f_1(x) = 3 \sin x - 2 \cos x$; $f_2(x) = \cos(4x + 1)$; $f_3(x) = x \cos x$; $f_4(x) = \cos^2 x$; $f_5(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

Exercice 3 ★★

Résoudre dans l'intervalle indiqué :

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$ sur $] -\pi ; \pi]$; b) $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$ sur $] -\pi ; \pi]$; c) $\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[-\pi ; \pi]$; d) $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ sur $[0 ; 2\pi[$ (poser $X = \cos x$).

Exercice 4 ★★★

1. En faisant apparaître un taux d'accroissement, déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$.

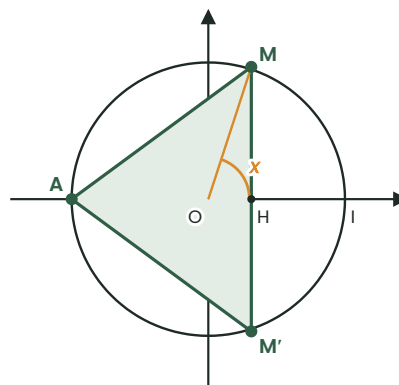
2. Soit $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ sur $[0 ; +\infty[$. Calculer $g'(x)$. En utilisant l'inégalité $\sin x \leq x$, valable pour $x \geq 0$ et démontrée dans le cours, montrer que g est croissante, puis en déduire que :

$$\text{pour tout } x \geq 0, \quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 5 – Type bac ★★★

Dans un repère orthonormé, on considère le cercle trigonométrique, le point $A(-1; 0)$ et, pour $x \in [0; \pi]$, les points $M(\cos x; \sin x)$ et $M'(\cos x; -\sin x)$. On note $H(\cos x; 0)$ le milieu de $[MM']$.

On cherche la position de M pour laquelle l'aire du triangle AMM' est maximale.



1. Montrer que l'aire du triangle AMM' est $f(x) = \sin x (1 + \cos x)$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0; \pi]$: $f'(x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$ et dresser le tableau de variations de f .
4. En déduire l'aire maximale du triangle AMM' . Quelle est alors la nature du triangle ?

5 Teste-toi (QCM)

- 1 $\cos \frac{2\pi}{3}$ est égal à :
 A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 B. $\frac{1}{2}$
 C. $-\frac{1}{2}$
 D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 2 La dérivée de $x \mapsto \cos(2x)$ est :
 A. $-\sin(2x)$
 B. $-2 \sin(2x)$
 C. $2 \sin(2x)$
 D. $2 \cos(2x)$
- 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ vaut :
 A. 1
 B. 0
 C. $+\infty$
 D. n'existe pas
- 4 Sur $] -\pi; \pi]$, les solutions de $\sin x = \frac{1}{2}$ sont :
 A. $\frac{\pi}{6}$ seulement
 B. $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$
 C. $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$
 D. $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$
- 5 La fonction sinus est :
 A. paire
 B. π -périodique
 C. impaire
 D. croissante sur $[0; \pi]$
- 6 Pour $x \in [0; \pi]$, on a $\cos x \geq 0$ si et seulement si :
 A. $x \in [0; \pi]$
 B. $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$
 C. $x \in [0; \frac{\pi}{3}]$
 D. $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

L'essentiel à retenir

- $M(x)$ a pour coordonnées $(\cos x ; \sin x)$; angles en **radians**
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $-1 \leq \cos x \leq 1$, $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques
- $\cos$ est paire ($\cos(-x) = \cos x$), $\sin$ est impaire ($\sin(-x) = -\sin x$)
- $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$
- $(\cos(ax + b))' = -a \sin(ax + b)$
- $(\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b)$
- $(\cos u)' = -u' \sin u$; $(\sin u)' = u' \cos u$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (nombre dérivé de $\sin$ en 0)
- $\cos x = \cos \alpha \iff x = \pm \alpha + 2k\pi$
- $\sin x = \sin \alpha \iff x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$
- Inéquations : lire la solution sur le cercle

6 Corrigés

Exercice 1

1. $\cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) = -\sin \frac{2\pi}{3} = -\sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 $\frac{11\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4}$, donc $\cos \frac{11\pi}{4} = \cos \frac{3\pi}{4} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\sin \frac{7\pi}{6} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.
2. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, donc $\cos x = \frac{4}{5}$ ou $\cos x = -\frac{4}{5}$. Comme $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$, $\cos x \leq 0$:
 $\cos x = -\frac{4}{5}$.

Exercice 2

$f'_1(x) = 3 \cos x + 2 \sin x$. $f'_2(x) = -4 \sin(4x + 1)$. $f'_3(x) = \cos x - x \sin x$. $f_4 = u^2$ avec $u = \cos x$:
 $f'_4(x) = 2u'u = -2 \sin x \cos x$.

$f_5 : 2 + \cos x \geq 1 > 0$, donc f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_5(x) = \frac{\cos x (2 + \cos x) - \sin x (-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} =$
 $\frac{2 \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$.

Exercice 3

- a) $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} : x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. Dans $] -\pi; \pi]$: $S = \left\{ -\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$.
- b) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} : x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. $S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$.
- c) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x = \pm \frac{3\pi}{4}$. Les points d'abscisse $\leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont sur l'arc de gauche, qui contient le point associé à π (et à $-\pi$). $S = \left[-\pi; -\frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi \right]$.
- d) $2X^2 - X - 1 = 0 : \Delta = 1 + 8 = 9$, $X = \frac{1+3}{4} = 1$ ou $X = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$. $\cos x = 1$ donne $x = 0$; $\cos x = -\frac{1}{2}$ donne $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$. $S = \left\{ 0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\}$.

Exercice 4

1. $u(x) = \sin(3x)$ vérifie $u(0) = 0$ et $u'(x) = 3 \cos(3x)$. Donc $\frac{\sin(3x)}{x} = \frac{u(x) - u(0)}{x - 0} \rightarrow u'(0) = 3 \cos 0 = 3$.
Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$.
2. $g'(x) = -\sin x + x = x - \sin x$. D'après le cours, $\sin x \leq x$ pour $x \geq 0$, donc $g'(x) \geq 0$: g est croissante sur $[0; +\infty[$. Ainsi, pour $x \geq 0$: $g(x) \geq g(0) = 1 - 1 + 0 = 0$, c'est-à-dire $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 5

1. Pour $x \in [0; \pi]$, $\sin x \geq 0$. La base $[MM']$ mesure $MM' = 2 \sin x$ et la hauteur issue de A est $AH = \cos x - (-1) = 1 + \cos x$ (car $[AH]$ est porté par l'axe des abscisses, perpendiculaire à (MM')). Aire = $\frac{1}{2} \times 2 \sin x \times (1 + \cos x) = \sin x (1 + \cos x) = f(x)$.

2. $f = uv$ avec $u = \sin x, v = 1 + \cos x$: $f'(x) = \cos x (1 + \cos x) + \sin x (-\sin x) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$. Avec $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$: $f'(x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1$. Et $(2 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 2 \cos^2 x + 2 \cos x - \cos x - 1 = 2 \cos^2 x + \cos x - 1$.

3. $\cos x + 1 \geq 0$, nul seulement en $x = \pi$. Sur $[0; \pi]$, $\cos$ est décroissante et $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$: $2 \cos x - 1 > 0$ sur $[0; \frac{\pi}{3}[$ et $2 \cos x - 1 < 0$ sur $]\frac{\pi}{3}; \pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$2 \cos x - 1$		+	0	-	
$\cos x + 1$		+		+	0
$f'(x)$		+	0	-	0
f	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

4. L'aire est maximale pour $x = \frac{\pi}{3}$: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,30$. Alors $MM' = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ et $AM^2 = (1 + \cos x)^2 + \sin^2 x = 2 + 2 \cos x = 3$, donc $AM = AM' = \sqrt{3} = MM'$: le triangle est **équilatéral**.

QCM

1. C ($\cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3}$) · 2. B ($a = 2$) · 3. A (nombre dérivé de $\sin$ en 0) · 4. B ($\alpha = \frac{\pi}{6}$ et $\pi - \alpha = \frac{5\pi}{6}$) · 5. C ($\sin(-x) = -\sin x$) · 6. D ($\cos$ décroît de 1 à -1 sur $[0; \pi]$ et s'annule en $\frac{\pi}{2}$)