

Primitives et équations différentielles

Si tu connais à chaque instant la vitesse d'une voiture, peux-tu retrouver sa position ? C'est le problème « à l'envers » de la dérivation... et il permet de prévoir le refroidissement d'un café ou la croissance d'une population !

Ce que tu vas savoir faire

- Vérifier qu'une fonction est une primitive, ou une solution d'une équation différentielle
- Calculer des primitives à l'aide du tableau des primitives usuelles et des formes $u'u^n$, $\frac{u'}{u}$, $u'e^u$...
- Déterminer la primitive qui prend une valeur donnée en un point
- Résoudre les équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$, avec ou sans condition initiale
- Utiliser une solution particulière pour résoudre $y' = ay + f$
- Programmer la méthode d'Euler en Python

À revoir avant de commencer

- Dérivées des fonctions usuelles et formules de dérivation (fiche 4)
- Fonction exponentielle et ses propriétés algébriques
- Fonction logarithme népérien (fiche 6)
- Une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante (1re)

1 Le cours

L'idée : dériver « à l'envers »

Jusqu'ici, on partait d'une fonction et on calculait sa dérivée. Souvent, c'est l'inverse : on connaît la vitesse $v(t)$ d'un mobile et on cherche sa position $x(t)$, sachant que $x'(t) = v(t)$. Plus fort : en physique ou en biologie, on connaît une **relation** entre une grandeur et sa vitesse de variation. « Une population croît d'autant plus vite qu'elle est nombreuse » se traduit par $N'(t) = k N(t)$. Trouver N , c'est résoudre une **équation différentielle**.

Définition – Équation différentielle

Une **équation différentielle** est une égalité liant une fonction inconnue y , sa dérivée y' et la variable x . Une **solution** sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I qui vérifie cette égalité pour tout x de I .

Exemple : $g(x) = e^{2x} - 1$ est solution de $y' = 2y + 2$ sur $\mathbb{R}$, car $g'(x) = 2e^{2x}$ et $2g(x) + 2 = 2e^{2x} - 2 + 2 = 2e^{2x}$. Pour vérifier, on **remplace** et on **compare**.

Primitives d'une fonction

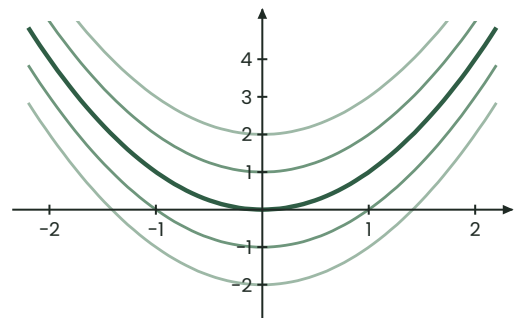
Définition – Primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une **primitive de f sur I** est une fonction F dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. Autrement dit, les primitives de f sont les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

Théorème (admis) : toute fonction **continue** sur un intervalle I admet des primitives sur I . (Un cas particulier est démontré dans la fiche 9, grâce aux intégrales.)

Une fonction a-t-elle **une seule** primitive ? Non ! x^2 est une primitive de $2x$, mais $x^2 + 1$ ou $x^2 - 3$ aussi, puisque la dérivée d'une constante est nulle. Les courbes des primitives se déduisent les unes des autres par des **translations verticales**.

La propriété suivante affirme qu'il n'y en a **pas d'autres**.



Les primitives $x \mapsto x^2 + C$ de $x \mapsto 2x$, pour $C = -2, -1, 0$ (en gras), 1 et 2.

Propriété – Deux primitives diffèrent d'une constante

Si F est une primitive de f sur un intervalle I , alors les primitives de f sur I sont exactement les fonctions $x \mapsto F(x) + k$, où k est une constante réelle.

Conséquence : pour tous $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une **unique** primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$ (car $F(x_0) + k = y_0$ impose $k = y_0 - F(x_0)$).

Démonstration AU PROGRAMME

Ce sont des primitives : si $G = F + k$, alors $G' = F' + 0 = f$.

Il n'y en a pas d'autres : soit G une primitive quelconque de f sur I et $H = G - F$. H est dérivable sur I et $H'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Une fonction de dérivée nulle sur un **intervalle** est constante : il existe k tel que $H(x) = k$, c'est-à-dire $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$. $\square$

Les primitives usuelles

Chaque ligne se vérifie en **dérivant** la colonne de droite. Par linéarité, une primitive de $f + g$ est $F + G$ et une primitive de kf est kF ; mais il n'y a **pas** de formule pour un produit ou un quotient quelconque.

Méthode – Reconnaître une forme $u'u^n, \frac{u'}{u}, u'e^u \dots$

1. Repérer la fonction u « emboîtée » (sous une puissance, au dénominateur, dans l'exponentielle).
2. Calculer u' et comparer avec ce qui reste : il manque souvent seulement une **constante multiplicative**.
3. Ajuster cette constante, appliquer la formule, puis **vérifier en dérivant**.

Fonction f	Une primitive F	Sur
k (constante)	kx	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$

Fonction (u dérivable)	Une primitive	Condition
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	$u > 0$
$u'e^u$	e^u	
$u' \cos u$	$\sin u$	
$u' \sin u$	$-\cos u$	
e^{ax+b} ($a \neq 0$)	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$	

Exemple résolu – Calculer des primitives

a) $f(x) = 6x^2 - 4x + 1$ b) $g(x) = e^{-3x}$ c) $h(x) = \frac{3x}{x^2 + 4}$ d) $k(x) = (2x - 1)^4$, toutes sur $\mathbb{R}$.

Solution

a) Par linéarité : $F(x) = 6 \times \frac{x^3}{3} - 4 \times \frac{x^2}{2} + x = 2x^3 - 2x^2 + x$. b) Forme e^{ax+b} avec $a = -3$:
 $G(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x}$.

c) $u(x) = x^2 + 4 > 0$, $u'(x) = 2x$, donc $h = \frac{3}{2} \times \frac{u'}{u}$ et $H(x) = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 4)$.

d) $u(x) = 2x - 1$, $u'(x) = 2$, donc $k = \frac{1}{2} u' u^4$ et $K(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x - 1)^5}{5} = \frac{(2x - 1)^5}{10}$. Vérification :
 $K'(x) = \frac{5 \times 2(2x - 1)^4}{10} = (2x - 1)^4 \checkmark$.

L'équation $y' = ay$

On cherche les fonctions dont la dérivée est **proportionnelle** à la fonction elle-même. Tu en connais une :
 $(e^{ax})' = ae^{ax}$.

Théorème – Solutions de $y' = ay$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle. Pour tous réels x_0 et y_0 , une **unique** solution vérifie la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Démonstration AU PROGRAMME

Ce sont des solutions : si $f(x) = Ce^{ax}$, alors $f'(x) = Ca e^{ax} = af(x)$.

Il n'y en a pas d'autres : soit f une solution et $g(x) = f(x)e^{-ax}$, dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = f'(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} = \underbrace{(f'(x) - af(x))}_{=0} e^{-ax} = 0.$$

Donc g est constante : $g(x) = C$, d'où $f(x) = Ce^{ax}$. **Condition initiale :** $Ce^{ax_0} = y_0 \iff C = y_0 e^{-ax_0}$, une seule valeur. $\square$

L'équation $y' = ay + b$

Théorème – Solutions de $y' = ay + b$ ($a \neq 0$)

Soit $a \neq 0$ et b deux réels. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où $C \in \mathbb{R}$. Pour tous réels x_0, y_0 , une unique solution vérifie $y(x_0) = y_0$.

Démonstration AU PROGRAMME

1. Une solution constante. Une fonction constante $y = c$ a une dérivée nulle : elle est solution si et seulement si $0 = ac + b$, soit $c = -\frac{b}{a}$.

2. On se ramène à $y' = ay$. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = f(x) + \frac{b}{a}$. Alors $g' = f'$ et $ag(x) = af(x) + b$, donc : $f' = af + b \iff g' = ag$.

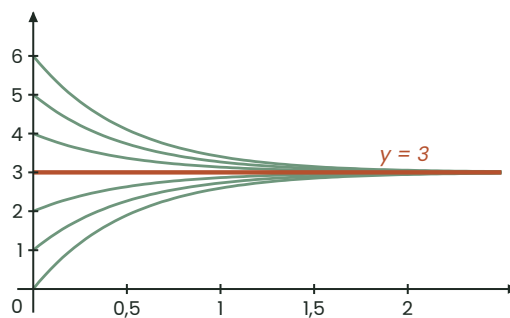
3. Conclusion. D'après le théorème précédent, $g' = ag \iff g(x) = Ce^{ax}$, c'est-à-dire $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$. L'unicité avec condition initiale se montre comme pour $y' = ay$. $\square$

À retenir : la structure des solutions

Solutions de $y' = ay + b =$ **solution particulière** constante + solutions de $y' = ay$.

Si $a < 0$, alors $e^{ax} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$: **toutes** les solutions tendent vers la constante $-\frac{b}{a}$, un **état d'équilibre**.

Plus généralement, si y_p est une solution particulière de $y' = ay + f$ (f fonction), les solutions sont les $y_p + Ce^{ax}$ (même preuve avec $g = y - y_p$).



Solutions $y = 3 + Ce^{-2x}$ de $y' = -2y + 6$: toutes se rapprochent de l'équilibre $y = 3$.

Exemple résolu – Refroidissement d'un café (loi de Newton)

Un café à 90 °C est posé dans une pièce à 20 °C. Sa température $\theta(t)$ (en °C, t en minutes) vérifie $\theta' = -0,1(\theta - 20)$ et $\theta(0) = 90$. Déterminer $\theta(t)$, puis l'instant où le café atteint 40 °C.

Solution

Méthode : on écrit l'équation sous la forme $y' = ay + b$ en lisant a et b **avec leur signe**, on écrit $y = Ce^{ax} - b/a$, puis la condition initiale donne C .

Ici : $\theta' = -0,1\theta + 2$, forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,1$, $b = 2$ et $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{-0,1} = 20$. Donc $\theta(t) = Ce^{-0,1t} + 20$, et $\theta(0) = C + 20 = 90$ donne $C = 70$: $\theta(t) = 20 + 70e^{-0,1t}$.

$\theta(t) = 40 \iff e^{-0,1t} = \frac{20}{70} = \frac{2}{7} \iff -0,1t = \ln \frac{2}{7} \iff t = 10 \ln \frac{7}{2} \approx 12,5$ min. Et $\theta(t) \rightarrow 20$ quand $t \rightarrow +\infty$: le café finit à la température de la pièce.

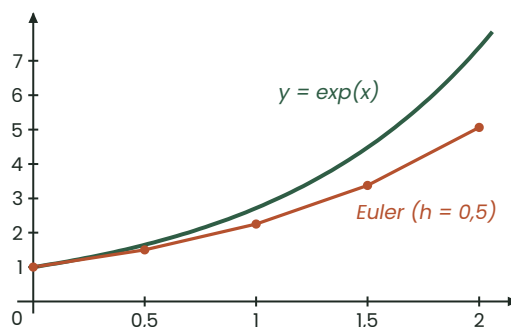
D'autres modèles du même type : en biologie (Malthus), $N' = kN$ donne $N(t) = N_0 e^{kt}$; en radioactivité, $N' = -\lambda N$ donne une décroissance exponentielle ; en électricité, la tension d'un condensateur qui se charge vérifie $u' = -\frac{1}{RC}u + \frac{E}{RC}$, d'où $u(t) = E + Ke^{-t/(RC)}$ (K constante).

Approcher une solution : la méthode d'Euler

Quand on ne sait pas résoudre une équation, on construit une **approximation** pas à pas. Pour h petit, la courbe est proche de sa tangente, donc

$$y(x+h) \approx y(x) + h y'(x).$$

Pour $y' = y$ avec $y(0) = 1$: $y_{k+1} = y_k + h y_k = (1+h)y_k$, puis on relie les points $(x_k; y_k)$. Plus le pas h est petit, meilleure est l'approximation.



Méthode d'Euler pour $y' = y$, $y(0) = 1$, pas $h = 0,5$.

2 Les pièges à éviter

Attention – Les erreurs classiques

- **Confondre dériver et primitiver.** Une primitive de e^{3x} est $\frac{1}{3}e^{3x}$, pas $3e^{3x}$ (ça, c'est la dérivée).
Réflexe : **dérive ton résultat**.
- **Primitiver un produit « facteur par facteur ».** Une primitive de xe^{x^2} n'est pas $\frac{x^2}{2}e^{x^2}$: on reconnaît $\frac{1}{2}u'e^u$ avec $u = x^2$, d'où $\frac{1}{2}e^{x^2}$.
- **Oublier une condition :** $\ln u$ n'est une primitive de $\frac{u'}{u}$ que si $u > 0$ sur l'intervalle.
- **Se tromper de signe :** $y' + 3y = 6$ s'écrit $y' = -3y + 6$, donc $a = -3$; et la constante est $-\frac{b}{a} = 2$ (vérifie qu'elle annule $ay + b$).
- **Condition initiale en $x_0 \neq 0$:** si $y = Ce^{2x}$ et $y(1) = 2$, alors $Ce^2 = 2$, donc $C = 2e^{-2}$ (et non $C = 2$).

3 Avec Python

La méthode d'Euler pour $y' = ay + b$, $y(x_0) = y_0$: à chaque étape, on avance de h en suivant la tangente. Avec $y' = y$, $y(0) = 1$, on approche $e^1 = e$; pour $h = 0,1$, on obtient $(1,1)^{10} \approx 2,59374$, et l'erreur est à peu près divisée par 10 quand le pas l'est.

Python

```
from math import exp
def euler(a, b, x0, y0, h, xmax):
    """Méthode d'Euler pour y' = a*y + b avec y(x0) = y0, pas h, jusqu'à xmax"""
    x, y = x0, y0
    while x < xmax - 1e-12:      # petite marge pour les erreurs d'arrondi
        y = y + h * (a * y + b)  # y(x+h) ≈ y(x) + h * y'(x)
        x = x + h
    return y
# y' = y et y(0) = 1 : la solution exacte est exp, on approche exp(1) = e
for h in [0.1, 0.01, 0.001]:
    print("h =", h, " approximation :", round(euler(1, 0, 0, 1, h, 1), 5))
print("valeur exacte :", round(exp(1), 5))
# Affichage : h = 0.1 approximation : 2.59374 | h = 0.01 approximation : 2.70481
#             h = 0.001 approximation : 2.71692 | valeur exacte : 2.71828
```

4 Exercices

Exercice 1 ★

Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur $\mathbb{R}$ b) $g(x) = e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$ c) $k(x) = \cos x - \sin x$ sur $\mathbb{R}$ d) $m(x) = 4x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 2 ★★

1. En reconnaissant une forme usuelle, déterminer une primitive de : a) $f(x) = x(x^2 + 1)^3$ sur $\mathbb{R}$ b) $g(x) = xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$ c) $k(x) = \frac{1}{(2x + 1)^2}$ sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

2. Déterminer la primitive F de $x \mapsto 2x + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ telle que $F(1) = 3$.

Exercice 3 ★★

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 6$.

- Déterminer la solution constante de (E) , puis résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$, puis sa limite en $+\infty$.

Exercice 4 ★★

- Montrer que $u(x) = 2x + 1$ définit une solution sur $\mathbb{R}$ de $(E) : y' = 2y - 4x$.
- En déduire toutes les solutions de (E) , puis la solution g telle que $g(0) = 3$.

Exercice 5 ★★★ – type bac

Lors d'une perfusion, la quantité de médicament dans le sang (en mg) à l'instant t (en heures) est notée $q(t)$. On admet que q est solution de $(E) : y' = -0,25y + 2$ et que $q(0) = 0$.

1. Résoudre l'équation (E) .
2. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $q(t) = 8(1 - e^{-0,25t})$.
3. Étudier le sens de variation de q sur $[0; +\infty[$ et sa limite en $+\infty$. Interpréter.
4. Le médicament est efficace dès que la quantité dans le sang atteint 6 mg. Au bout de combien de temps (à la minute près) est-il efficace ?

5 Teste-toi (QCM)

- 1 Une primitive de $x \mapsto e^{3x}$ sur $\mathbb{R}$ est :
A. $x \mapsto 3e^{3x}$ **B.** $x \mapsto \frac{1}{3}e^{3x}$
C. $x \mapsto e^{3x} + 3$ **D.** $x \mapsto 3xe^{3x}$
- 2 Les solutions de $y' = -4y$ sont les fonctions :
A. $x \mapsto Ce^{4x}$ **B.** $x \mapsto Ce^{-4x}$
C. $x \mapsto -4e^x + C$ **D.** $x \mapsto e^{-4x} + C$
- 3 La solution constante de $y' = 3y - 6$ est :
A. $y = -2$ **B.** $y = 2$
C. $y = 3$ **D.** $y = 6$
- 4 Une primitive de $x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$ est :
A. $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ **B.** $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$
C. $x \mapsto \ln(2x)$ **D.** $x \mapsto (x^2 + 1)^2$
- 5 Méthode d'Euler pour $y' = y$, $y(0) = 1$, pas $h = 0,1$: la valeur y_1 est :
A. 1 **B.** 1,1
C. 1,01 **D.** 0,1

L'essentiel à retenir

- F primitive de f sur $I \iff F' = f$ sur I .
- Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
- Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une **constante** ; une seule vérifie $F(x_0) = y_0$.
- $u'u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$; $\frac{u'}{u} \rightarrow \ln u$ ($u > 0$) ; $u'e^u \rightarrow e^u$.
- $\frac{u'}{u^2} \rightarrow -\frac{1}{u}$; $\frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u}$.
- $y' = ay$: $y = Ce^{ax}$.
- $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) : $y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$.
- $y' = ay + f$: solution particulière + Ce^{ax} .
- La condition initiale fixe la constante C .
- Euler : $y_{k+1} = y_k + h y'_k$. Toujours vérifier en dérivant !

6 Corrigés

Exercice 1

a) $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$. b) $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$. c) $K(x) = \sin x + \cos x$ (une primitive de $-\sin$ est $\cos$). d) $M(x) = x^4 - 2\sqrt{x}$. Les autres primitives s'obtiennent en ajoutant une constante.

Exercice 2

1. a) $u = x^2 + 1, u' = 2x : f = \frac{1}{2}u'u^3$, donc $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2 + 1)^4}{4} = \frac{(x^2 + 1)^4}{8}$.

b) $u = x^2, u' = 2x : g = \frac{1}{2}u'e^u$, donc $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$. c) $u = 2x + 1$ (non nul sur l'intervalle), $u' = 2 : k = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u^2}$, donc $K(x) = -\frac{1}{2(2x + 1)}$.

2. Les primitives sont $F(x) = x^2 + \ln x + C$. $F(1) = 1 + 0 + C = 3$ donne $C = 2 : F(x) = x^2 + \ln x + 2$.

Exercice 3

1. (E) s'écrit $y' = -2y + 6$. Une constante c est solution si $0 = -2c + 6$, soit $c = 3$. Avec $a = -2$: les solutions sont $y(x) = Ce^{-2x} + 3, C \in \mathbb{R}$.

2. $f(0) = C + 3 = 1$ donne $C = -2 : f(x) = 3 - 2e^{-2x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

Exercice 4

1. $u'(x) = 2$ et $2u(x) - 4x = 4x + 2 - 4x = 2$. Donc $u' = 2u - 4x : u$ est solution.

2. Ici $a = 2$: les solutions sont $y(x) = 2x + 1 + Ce^{2x}, C \in \mathbb{R}$. $g(0) = 1 + C = 3$ donne $C = 2 : g(x) = 2x + 1 + 2e^{2x}$.

Exercice 5

1. $a = -0,25$ et $b = 2$, donc $-\frac{b}{a} = \frac{2}{0,25} = 8$. Les solutions sont $y(t) = Ce^{-0,25t} + 8, C \in \mathbb{R}$.

2. $q(0) = C + 8 = 0$ donne $C = -8$, donc $q(t) = 8 - 8e^{-0,25t} = 8(1 - e^{-0,25t})$.

3. $q'(t) = 8 \times 0,25 e^{-0,25t} = 2e^{-0,25t} > 0 : q$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$. Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,25t} = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = 8$: la quantité augmente et se stabilise vers 8 mg (équilibre entre apport et élimination).

4. $q(t) \geq 6 \iff 1 - e^{-0,25t} \geq 0,75 \iff e^{-0,25t} \leq 0,25 \iff -0,25t \leq \ln 0,25 \iff t \geq -4 \ln 0,25 = 4 \ln 4 = 8 \ln 2$ (on divise par $-0,25 < 0$: le sens change). $8 \ln 2 \approx 5,545$ h et $0,545 \times 60 \approx 32,7$ min : le médicament est efficace au bout d'environ **5 h 33 min**.

QCM

1. B (dériver $\frac{1}{3}e^{3x}$ redonne e^{3x}) · 2. B (Ce^{ax} avec $a = -4$) · 3. B ($0 = 3c - 6$ donne $c = 2$) · 4. A (forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 1 > 0$) · 5. B ($y_1 = (1 + 0,1) \times 1 = 1,1$)