

Calcul intégral

Comment calculer l'aire d'une forme aux bords courbes, ou la distance parcourue par une voiture dont la vitesse change sans cesse ? Surprise : il suffit de connaître des primitives !

Ce que tu vas savoir faire

- Interpréter une intégrale comme une aire et l'estimer graphiquement
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, ou d'une intégration par parties
- Utiliser la linéarité, la relation de Chasles et l'intégration des inégalités pour encadrer une intégrale
- Calculer une valeur moyenne et l'aire entre deux courbes
- Étudier une suite d'intégrales
- Programmer les méthodes des rectangles, des trapèzes et de Monte-Carlo

À revoir avant de commencer

- Primitives usuelles et formes $u'u^n$, $\frac{u'}{u}$, $u'e^u$ (fiche 8)
- Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante (fiche 8)
- Dérivée d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$
- Théorème des gendarmes pour les suites (fiche 2)
- Aires du rectangle, du triangle et du trapèze

1 Le cours

L'idée : une aire qui raconte une histoire

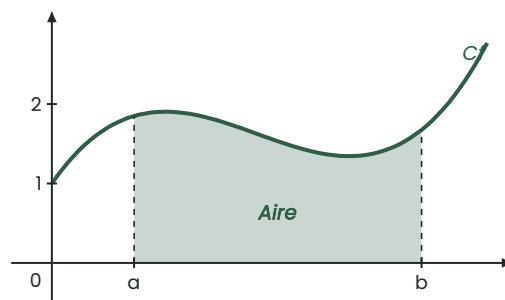
Une voiture roule à 90 km/h pendant 2 h : elle parcourt $90 \times 2 = 180$ km, c'est l'**aire du rectangle** sous la courbe de la vitesse. Si la vitesse varie, la distance parcourue reste l'**aire sous la courbe** de la vitesse. Calculer une intégrale, c'est calculer une telle aire... et on va voir que les **primitives** font tout le travail !

Intégrale d'une fonction continue positive

Dans un repère orthogonal $(O; I, J)$, l'**unité d'aire** (u.a.) est l'aire du rectangle de côtés OI et OJ .

Définition – Intégrale

Soit f une fonction **continue et positive** sur $[a; b]$. L'**intégrale de a à b de f** , notée $\int_a^b f(x) dx$, est l'aire, en u.a., du domaine compris entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



L'aire colorée vaut $\int_a^b f(x) dx$ u.a.

Remarques : La variable x est **muette** : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$. Premiers calculs avec la géométrie : $\int_1^3 5 dx = 2 \times 5 = 10$ (rectangle) et $\int_0^2 x dx = \frac{2 \times 2}{2} = 2$ (triangle).

Le lien avec les primitives

Théorème fondamental

Si f est continue et positive sur $[a; b]$, la fonction F_a définie sur $[a; b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et $F'_a = f$: c'est la **primitive de f qui s'annule en a** .

Démonstration dans le cas où f est croissante AU PROGRAMME

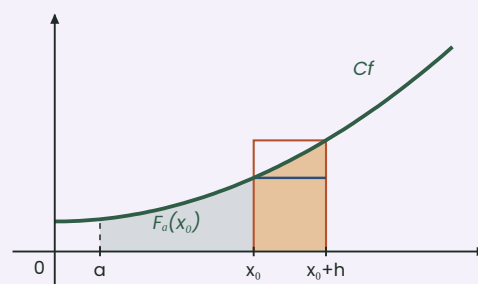
Soit $x_0 \in [a; b[$ et $h > 0$ tel que $x_0 + h \leq b$. La différence $F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)$ est l'aire de la **bande orange** entre x_0 et $x_0 + h$.

Comme f est croissante, cette bande contient le rectangle de hauteur $f(x_0)$ et est contenue dans celui de hauteur $f(x_0 + h)$, de même largeur h :

$$h f(x_0) \leq F_a(x_0 + h) - F_a(x_0) \leq h f(x_0 + h).$$

En divisant par $h > 0$: $f(x_0) \leq \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$. Comme f est continue en x_0 , $f(x_0 + h) \rightarrow f(x_0)$ quand $h \rightarrow 0$: par le théorème des gendarmes, le taux d'accroissement tend vers $f(x_0)$.

Pour $h < 0$ (avec $x_0 + h \geq a$), on obtient de même $f(x_0 + h) \leq \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} \leq f(x_0)$, et la même limite. Donc F_a est dérivable en x_0 et $F'_a(x_0) = f(x_0)$. Enfin $F'_a(a) = 0$. $\square$



Théorème – Calcul d'une intégrale

Si f est continue et positive sur $[a; b]$ et si F est **une** primitive quelconque de f sur $[a; b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{que l'on note } [F(x)]_a^b.$$

Preuve : $F = F_a + k$ (deux primitives diffèrent d'une constante), donc $F(b) - F(a) = F_a(b) - F_a(a) = \int_a^b f(x) dx - 0$.

Toute fonction continue admet des primitives

Ce théorème (vu en fiche 8) se déduit du précédent sur un segment $[a; b]$: une fonction continue f y admet un minimum m (admis). La fonction $g = f - m$ est continue et positive, donc $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ vérifie $G' = g$, et $F(x) = G(x) + mx$ vérifie $F' = g + m = f$.

Définition – Cas d'une fonction de signe quelconque

Soit f continue sur un intervalle I , F une primitive de f sur I , et a, b dans I . On pose $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ (le résultat ne dépend pas de la primitive choisie).

Si $a \leq b$ et $f \leq 0$ sur $[a; b]$, l'intégrale est l'**opposé** de l'aire : on parle d'**aire algébrique**. On a aussi $\int_a^a f(x) dx = 0$ et $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

Exemple résolu – Calculer des intégrales

a) $\int_1^2 (3x^2 - 2x) dx$ b) $\int_0^\pi \sin x dx$ c) $\int_0^2 (x - 2) dx$

Solution

a) $\int_1^2 (3x^2 - 2x) dx = [x^3 - x^2]_1^2 = (8 - 4) - (1 - 1) = 4$.

b) $\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$. c) $\left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^2 = (2 - 4) - 0 = -2$: négatif, car $x - 2 \leq 0$ sur $[0; 2]$ (triangle d'aire 2).

Propriétés de l'intégrale

Propriétés – f et g continues sur un intervalle I , a, b, c dans I , $\lambda \in \mathbb{R}$

- **Linéarité** : $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ et $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$.
- **Relation de Chasles** : $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.
- **Positivité** : si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
- **Intégration des inégalités** : si $a \leq b$ et $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Exemple résolu – Encadrer une intégrale qu'on ne sait pas calculer

Montrer que $1 - e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$.

Solution

Pour $x \in [0; 1]$: $0 \leq x^2 \leq x$, donc $-x \leq -x^2 \leq 0$, et comme $\exp$ est croissante : $e^{-x} \leq e^{-x^2} \leq 1$. On intègre sur $[0; 1]$ (bornes dans l'ordre croissant) : $\int_0^1 e^{-x} dx \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 1 dx$, avec

$$\int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - e^{-1} \approx 0,63.$$

Valeur moyenne

Définition – Valeur moyenne

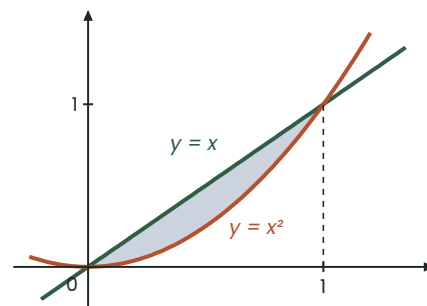
La **valeur moyenne** de f continue sur $[a; b]$ ($a < b$) est $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Si f est positive, le rectangle de base $[a; b]$ et de hauteur μ a la **même aire** que le domaine sous la courbe. *Exemple* : la valeur moyenne de $x \mapsto x^2$ sur $[0; 3]$ est $\frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{1}{3} \times 9 = 3$.

Aire entre deux courbes

Propriété

Si f et g sont continues et $f \geq g$ sur $[a; b]$, l'aire (en u.a.) du domaine compris entre $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ et les droites $x = a$, $x = b$ est $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.



Domaine entre $y = x$ et $y = x^2$ sur $[0; 1]$.

Exemple résolu

Sur $[0; 1]$, $x^2 \leq x$ (car $x^2 - x = x(x - 1) \leq 0$). L'aire entre les deux courbes est :

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ u.a.}$$

Si l'unité graphique est 2 cm sur chaque axe, 1 u.a. = 4 cm², et l'aire vaut $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ cm².

Intégration par parties

Théorème – Intégration par parties (IPP)

Si u et v sont dérivables sur $[a; b]$, de dérivées u' et v' continues, alors

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

Démonstration AU PROGRAMME

La fonction uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$, fonction continue. Donc uv est une primitive de $u'v + uv'$ et $\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx = [u(x)v(x)]_a^b$. Par linéarité, $\int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx = [uv]_a^b$, d'où la formule. $\square$

Méthode : on choisit pour u la fonction qui se **simplifie en dérivant** (polynôme, $\ln x$) et pour v' une fonction dont on connaît une **primitive** (e^x , $\cos x$, 1 ...) : la nouvelle intégrale $\int u'v$ doit être plus simple.

Exemple résolu – Calculer $I = \int_0^1 x e^x dx$

Solution

On pose $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$, d'où $u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$ (fonctions dérivables à dérivées continues). Alors :

$$I = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x dx = (e - 0) - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

Suites d'intégrales

Exemple résolu – Étudier $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$

Solution

Signe : sur $[0; 1]$, $\frac{x^n}{1+x} \geq 0$, donc $I_n \geq 0$ (positivité).

Sens de variation : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx \leq 0$ car $x-1 \leq 0$ sur $[0; 1]$: la suite est décroissante.

Limite : $\frac{1}{1+x} \leq 1$ sur $[0; 1]$, donc $I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. Ainsi $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

2 Les pièges à éviter

Attention – Les erreurs classiques

- **Inverser l'ordre :** c'est $F(b) - F(a)$ (borne du haut moins borne du bas). Mets des **parenthèses** : $[x^2 - x]_1^3 = (9 - 3) - (1 - 1)$.
- **Confondre intégrale et aire** quand f change de signe : $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$, alors que l'aire entre la courbe et l'axe vaut 4 u.a. On découpe avec Chasles.
- **Intégrer une inégalité avec des bornes dans le mauvais ordre :** il faut $a \leq b$.
- **Croire que** $\int fg = \int f \times \int g$. C'est faux : pour un produit, pense à l'IPP (sans oublier le signe « - »).
- **Oublier le facteur** $\frac{1}{b-a}$ dans la valeur moyenne, ou oublier de convertir les u.a. en cm^2 .

3 Avec Python

Pour approcher $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2$, on découpe $[1; 2]$ en n bandes de largeur $h = \frac{1}{n}$. **Rectangles :** on additionne les aires $h \times f(x_k)$. **Trapezes :** on remplace chaque rectangle par un trapèze (plus précis : 4 décimales exactes pour $n = 100$, contre 2 pour les rectangles). **Monte-Carlo :** on tire des points au hasard

dans un rectangle et on multiplie la proportion de points sous la courbe par l'aire du rectangle (le résultat dépend du tirage).

Python

```
from math import log
from random import random, seed
def f(x):
    return 1 / x
def rectangles(f, a, b, n):      # hauteur prise à gauche
    h = (b - a) / n
    return h * sum(f(a + k * h) for k in range(n))
def trapezes(f, a, b, n):      # moyenne des hauteurs gauche et droite
    h = (b - a) / n
    return h * sum((f(a + k * h) + f(a + (k + 1) * h)) / 2 for k in range(n))
def monte_carlo(f, a, b, M, N):
    """N points au hasard dans le rectangle [a ; b] x [0 ; M] (on suppose 0 <= f <= M)"""
    dessous = 0
    for i in range(N):
        x = a + (b - a) * random()
        y = M * random()
        if y <= f(x):
            dessous = dessous + 1
    return (dessous / N) * (b - a) * M # proportion x aire du rectangle
seed(2027) # fixe le hasard : on obtient toujours le même tirage
print("rectangles :", round(rectangles(f, 1, 2, 100), 6)) # rectangles : 0.695653
print("trapèzes :", round(trapezes(f, 1, 2, 100), 6)) # trapèzes : 0.693153
print("Monte-Carlo :", round(monte_carlo(f, 1, 2, 1, 100000), 6)) # Monte-Carlo : 0.69375
print("ln 2 =", round(log(2), 6)) # ln 2 = 0.693147
```

4 Exercices

Exercice 1 ★

Calculer : a) $\int_0^2 (x^2 - x + 1) dx$ b) $\int_0^{\ln 3} e^x dx$ c) $\int_1^{e^2} \frac{2}{x} dx$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ e) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

Exercice 2 ★

Un mobile roule à la vitesse $v(t) = 3t^2 - 12t + 15$ (en m/s) à l'instant t (en s). La distance parcourue entre $t = 0$ et $t = 4$ est $\int_0^4 v(t) dt$.

1. Justifier que $v(t) > 0$ pour tout t , puis calculer la distance parcourue.
2. En déduire la vitesse moyenne du mobile sur $[0 ; 4]$.

Exercice 3 ★★

Soit $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x + 2$.

1. Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et leur position relative entre ces points.
2. Calculer l'aire du domaine compris entre les deux courbes, en u.a. puis en cm^2 (unité graphique : 1 cm).

Exercice 4 ★★

À l'aide d'une intégration par parties, calculer : a) $\int_1^e \ln x \, dx$ (poser $v'(x) = 1$) b) $\int_0^\pi x \cos x \, dx$.

Exercice 5 ★★★ – type bac

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \, dx$.

1. Calculer I_0 .
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} = (n+1) I_n - e^{-1}$. En déduire I_1 et I_2 .
3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
4. Montrer que pour tout n : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de (I_n) .

5 Teste-toi (QCM)

- 1 $\int_0^1 3x^2 \, dx$ vaut :
 A. 1 B. 3
 C. 6 D. $\frac{1}{3}$
- 2 Si $\int_0^2 f(x) \, dx = 3$ et $\int_2^5 f(x) \, dx = 4$, alors $\int_0^5 f(x) \, dx$ vaut :
 A. 1 B. 7
 C. 12 D. -1
- 3 La valeur moyenne de $x \mapsto 2x$ sur $[0; 4]$ est :
 A. 2 B. 4
 C. 8 D. 16
- 4 Par intégration par parties, $\int_0^1 x e^x \, dx$ est égale à :
 A. $[xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx$ B. $[xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x \, dx$
 C. $[e^x]_0^1 - \int_0^1 xe^x \, dx$ D. $\int_0^1 x \, dx \times \int_0^1 e^x \, dx$
- 5 Pour $x \geq 1$, on pose $F(x) = \int_1^x \ln t \, dt$. Alors $F'(x)$ vaut :
 A. $\frac{1}{x}$ B. $\ln x$
 C. $x \ln x - x$ D. 0

L'essentiel à retenir

- $f \geq 0$: $\int_a^b f(x) \, dx = \text{aire sous } \mathcal{C}_f \text{ (u.a.)}$.
- $x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$: primitive de f nulle en a .
- $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.
- Si $f \leq 0$ sur $[a; b]$: intégrale = - aire.
- Linéarité et Chasles : $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$.
- $a \leq b$ et $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- Valeur moyenne : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$.
- Aire entre courbes ($f \geq g$) : $\int_a^b (f - g)$.
- IPP : $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$.
- Approcher : rectangles, trapèzes, Monte-Carlo.

6 Corrigés

Exercice 1

a) $\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2 + 2 = \frac{8}{3}$. b) $[e^x]_0^{\ln 3} = 3 - 1 = 2$. c) $[2 \ln x]_1^{e^2} = 2 \times 2 - 0 = 4$. d) $[\sin x]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1$. e) Forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 1 > 0$: $[\ln(x^2 + 1)]_0^1 = \ln 2$.

Exercice 2

1. Le discriminant de $3t^2 - 12t + 15$ est $144 - 180 = -36 < 0$ et $3 > 0$: $v(t) > 0$ pour tout t . Distance : $\int_0^4 v(t) dt = [t^3 - 6t^2 + 15t]_0^4 = 64 - 96 + 60 = 28$ m.

2. Vitesse moyenne : $\mu = \frac{1}{4-0} \times 28 = 7$ m/s.

Exercice 3

1. $f(x) = g(x) \iff 4 - x^2 = x + 2 \iff x^2 + x - 2 = 0 \iff (x-1)(x+2) = 0 \iff x = 1$ ou $x = -2$. Et $f(x) - g(x) = -x^2 - x + 2 = -(x-1)(x+2) \geq 0$ sur $[-2; 1]$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

2. $\mathcal{A} = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^1 = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{9}{2}$ u.a., soit 4,5 cm².

Exercice 4

a) $u = \ln x, v' = 1, u' = \frac{1}{x}, v = x$: $\int_1^e \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx = e - (e - 1) = 1$.

b) $u = x, v' = \cos x, u' = 1, v = \sin x$: $\int_0^\pi x \cos x dx = [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = 0 - [-\cos x]_0^\pi = -(1 + 1) = -2$.

Exercice 5

1. $I_0 = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - e^{-1}$. 2. $u = x^{n+1}, v' = e^{-x}, u' = (n+1)x^n, v = -e^{-x}$: $I_{n+1} = [-x^{n+1}e^{-x}]_0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} dx = -e^{-1} + (n+1)I_n$. Donc $I_1 = I_0 - e^{-1} = 1 - 2e^{-1}$ et $I_2 = 2I_1 - e^{-1} = 2 - 5e^{-1}$.

3. $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n (x-1)e^{-x} dx \leq 0$ car sur $[0; 1]$, $x^n \geq 0, x-1 \leq 0$ et $e^{-x} > 0$: (I_n) est décroissante.

4. Sur $[0; 1]$: $0 \leq e^{-x} \leq 1$, donc $0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n$. En intégrant ($0 \leq 1$) : $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

QCM

1. A ($[x^3]_0^1 = 1$) · 2. B (Chasles : $3 + 4$) · 3. B ($\frac{1}{4}[x^2]_0^4 = \frac{16}{4}$) · 4. A ($u = x, v' = e^x$) · 5. B (théorème fondamental : F est la primitive de $\ln$ qui s'annule en 1)