

Décrire un mouvement

Sur un manège qui tourne à vitesse constante, ton compteur de vitesse ne bouge pas... et pourtant tu subis une accélération. Comment est-ce possible ?

Ce que tu vas savoir faire

- Choisir un référentiel et écrire le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ dans un repère cartésien
- Obtenir les coordonnées des vecteurs vitesse et accélération en dérivant celles du vecteur position
- Utiliser le repère de Frenet pour un mouvement circulaire : $a_T = \frac{dv}{dt}$ et $a_N = \frac{v^2}{R}$
- Caractériser le vecteur accélération d'un mouvement rectiligne (uniforme, uniformément varié) et circulaire (uniforme ou non)
- Exploiter une chronophotographie ou une vidéo (pointage) pour estimer vitesses et accélérations, à la main et avec Python

À revoir avant de commencer

- Référentiel, trajectoire, vecteur vitesse moyenne (2de)
- Variation du vecteur vitesse et action mécanique (1re)
- Dérivées usuelles : t^n , polynômes, $\cos$, $\sin$ (maths)
- Coordonnées et norme d'un vecteur, théorème de Pythagore
- Conversions d'unités : $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

1 Le cours

1. Avant tout : par rapport à quoi ?

Assis dans un train, ton voisin est **immobile** par rapport à toi... mais il file à $300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ par rapport aux vaches qui regardent passer le train. Un mouvement n'a de sens que **par rapport à quelque chose** : c'est la notion de référentiel.

Définitions – Système, référentiel, repère

- Le **système** est l'objet dont on étudie le mouvement. On le modélise souvent par un **point** M (en Terminale, c'est son **centre de masse**, voir fiche 10).
- Un **référentiel** est un **objet de référence** par rapport auquel on repère les positions, associé à une **horloge** pour mesurer les dates t . Les trois à connaître : **terrestre** (le sol, le laboratoire : mouvements de la vie courante), **géocentrique** (centre de la Terre + trois étoiles lointaines : satellites, Lune), **héliocentrique** (centre du Soleil + trois étoiles lointaines : planètes, sondes).
- Dans ce référentiel, on choisit un **repère d'espace** $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: une origine O et trois vecteurs unitaires orthogonaux.
- La **trajectoire** est l'ensemble des positions successives occupées par M au cours du temps.

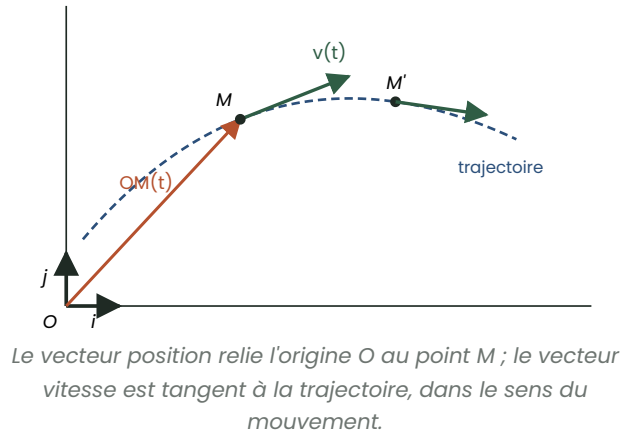
2. Le vecteur position

Définition – Vecteur position

À chaque date t , la position du point M est repérée par le **vecteur position** :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Les fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sont les **équations horaires** du mouvement ; elles s'expriment en mètres (m), t en secondes (s).



3. Le vecteur vitesse : une dérivée

En Seconde, tu calculais une vitesse **moyenne** entre deux positions : $\vec{v} \approx \frac{\overrightarrow{M_i M_{i+1}}}{\Delta t}$. Si on fait tendre Δt vers 0, ce taux de variation devient une **dérivée** : on obtient la vitesse **instantanée**.

Définition – Vecteur vitesse

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \iff v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

- v_x, v_y, v_z en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; la **norme** (la « vitesse » du compteur) vaut $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.
- Le vecteur vitesse est toujours **tangent à la trajectoire** et orienté dans le **sens du mouvement**.

4. Le vecteur accélération : la variation de la vitesse

Définition – Vecteur accélération

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \iff a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ etc.}$$

- a_x, a_y, a_z en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ (des « mètres par seconde, par seconde ») ; norme $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.
- Le vecteur accélération est non nul dès que le vecteur vitesse **change** : de **valeur**, de **direction** ou de **sens**. Il y a donc une accélération aussi quand on **freine** ($\vec{a}$ opposé à $\vec{v}$) et quand on **tourne** à vitesse constante : c'est la réponse à la question de la couverture !
- Il est toujours orienté vers **l'intérieur de la courbure** de la trajectoire (côté concave).

Établir $\vec{v}$ et $\vec{a}$ à partir de $\overrightarrow{OM}$ À SAVOIR ÉTABLIR

Un point M se déplace dans un plan avec $x(t) = 2,0t$ et $y(t) = 1,5t^2$ (x, y en m, t en s). On dérive coordonnée par coordonnée :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = 2,0 \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 3,0t \end{cases} \quad \vec{a} \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = 3,0 \end{cases}$$

À $t = 2,0 \text{ s}$: $v_x = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_y = 6,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, donc $v = \sqrt{2,0^2 + 6,0^2} \approx 6,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. L'accélération est **constante** : $\vec{a} = 3,0 \vec{j}$, soit $a = 3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ à chaque instant, alors que la vitesse, elle, change tout le temps.

Méthode – Remonter de $\vec{a}$ à $\overrightarrow{OM}$ (primitives)

On cherche des **primitives** et on fixe les constantes grâce aux **conditions initiales** ($\vec{v}_0$ et $\overrightarrow{OM}_0$ à $t = 0$) : $\vec{a} \rightarrow \vec{v}(t) \rightarrow \overrightarrow{OM}(t)$.

Exemple : si $a_x = a$ (constante), alors $v_x(t) = a t + v_{0x}$ puis $x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_{0x} t + x_0$. C'est exactement ce qu'on fera en fiche 10 pour la chute libre.

5. Les mouvements rectilignes

Le mouvement est **rectiligne** si la trajectoire est une droite. On prend alors l'axe (Ox) le long de cette droite : tout se passe sur une seule coordonnée $x(t)$.

Rectiligne uniforme (MRU)

Vecteur vitesse **constant** (même valeur, même direction, même sens).

$$\vec{a} = \vec{0}, \quad v = v_0, \quad x(t) = v_0 t + x_0$$

Rectiligne uniformément varié (MRUV)

Vecteur accélération **constant** et colinéaire à la trajectoire.

$$v(t) = a t + v_0, \quad x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

Pour un mouvement rectiligne uniformément varié, il est **accélééré** si $\vec{a}$ et $\vec{v}$ ont le **même sens** (la valeur de la vitesse augmente), **ralenti** (ou décélééré) s'ils sont de **sens opposés**.

Une relation utile sans le temps À SAVOIR ÉTABLIR

Pour un MRUV parti de $x_0 = 0$ avec la vitesse v_0 : $t = \frac{v - v_0}{a}$. En remplaçant dans $x(t)$:

$$x = \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 + v_0 \frac{v - v_0}{a} = \frac{(v - v_0)^2 + 2v_0(v - v_0)}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

d'où $v^2 - v_0^2 = 2 a x$. Pratique pour une distance de freinage (on retrouvera ce résultat avec l'énergie en fiche 10).

Exemple résolu – Le 0 à 100 km/h

Une voiture électrique passe de 0 à $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en $8,0 \text{ s}$ en ligne droite. On suppose son accélération constante. Calculer son accélération et la distance parcourue.

Solution

Conversion : $v = \frac{100}{3,6} \approx 27,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. **Accélération** : $v(t) = a t$ (départ arrêté), donc $a = \frac{v}{t} = \frac{27,8}{8,0} \approx 3,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Distance : $x = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \times 3,47 \times 8,0^2 \approx 1,1 \times 10^2 \text{ m}$ (on vérifie avec $v^2 = 2 a x$: $x = 27,8^2 / (2 \times 3,47) \approx 111 \text{ m}$).

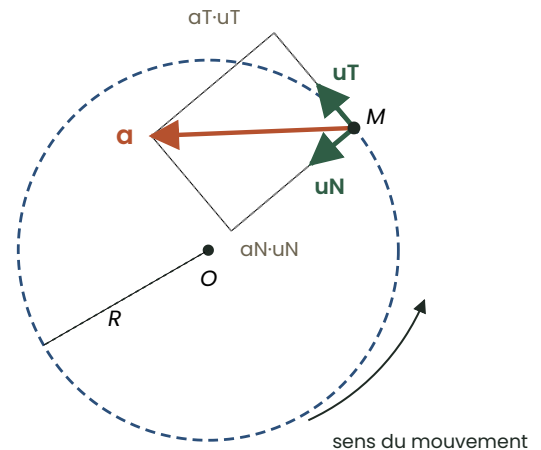
6. Le repère de Frenet et les mouvements circulaires

Pour un mouvement sur un cercle, les axes fixes (Ox) , (Oy) ne sont pas pratiques : les coordonnées de $\vec{v}$ changent sans arrêt. On utilise un repère qui **suit le point** M dans son mouvement.

Définition – Repère de Frenet

Le repère de Frenet $(M; \vec{u}_T, \vec{u}_N)$ a pour origine le point mobile M et :

- $\vec{u}_T$: vecteur unitaire **tangent** à la trajectoire, orienté dans le **sens du mouvement** ;
- $\vec{u}_N$: vecteur unitaire **normal** (perpendiculaire à $\vec{u}_T$), orienté **vers le centre** O du cercle.



Repère de Frenet en M . Ici la vitesse augmente : a a une composante tangentielle dans le sens de u_T .

Loi – Vitesse et accélération dans le repère de Frenet

Pour un mouvement circulaire de rayon R (en m) :

$$\vec{v} = v \vec{u}_T \quad \vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a_T} \vec{u}_T + \underbrace{\frac{v^2}{R}}_{a_N} \vec{u}_N$$

- $a_T = \frac{dv}{dt}$: accélération **tangentielle** ($m \cdot s^{-2}$), liée au changement de **valeur** de la vitesse ;
- $a_N = \frac{v^2}{R}$: accélération **normale** ($m \cdot s^{-2}$), toujours positive, liée au changement de **direction** ;
- $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$.

7. Mouvement circulaire uniforme ou non uniforme

Propriété – Mouvement circulaire uniforme (MCU) ou non uniforme

Uniforme : v est **constante**, donc $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$ et $\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{u}_N$, $a = \frac{v^2}{R}$, $v = \frac{2\pi R}{T}$ (T : **période**, durée d'un tour, en s). Le vecteur accélération est **centripète** : il pointe vers le centre ; sa valeur est constante mais sa direction tourne avec M .

Non uniforme : $a_T \neq 0$, donc $\vec{a}$ n'est plus dirigé vers le centre. Il pointe toujours vers l'intérieur du cercle, mais « en avant » de $\vec{u}_N$ si la vitesse augmente ($a_T > 0$), « en arrière » si elle diminue ($a_T < 0$).

Exemple résolu – Le manège

Une nacelle de manège décrit un cercle de rayon $R = 5,0 \text{ m}$ en $T = 8,0 \text{ s}$, à vitesse constante. Caractériser son vecteur accélération.

Solution

Mouvement circulaire uniforme : $v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \times 5,0}{8,0} \approx 3,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$a_T = 0 \text{ et } a = a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{3,93^2}{5,0} \approx 3,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ (on peut aussi écrire } a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}).$$

Le vecteur accélération est **centripète** (dirigé de la nacelle vers l'axe du manège), de valeur $3,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, environ le tiers de $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Exemple résolu – Accélérer dans un rond-point

Une voiture roule sur un rond-point de rayon $R = 20 \text{ m}$. Sa vitesse passe régulièrement de $5,0$ à $10,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ en $5,0 \text{ s}$. Calculer son accélération à l'instant où $v = 8,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Solution

La vitesse augmente « régulièrement », donc

$$a_T = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10,0 - 5,0}{5,0} = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{8,0^2}{20} = 3,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \text{ puis } a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{1,0^2 + 3,2^2} \approx 3,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

C'est surtout le virage (a_N) qui « secoue » les passagers, bien plus que l'augmentation de vitesse.

8. Bilan : caractériser le vecteur accélération

Mouvement	Vecteur vitesse $\vec{v}$	Vecteur accélération $\vec{a}$
Rectiligne uniforme	constant	$\vec{a} = \vec{0}$
Rectiligne accéléré	direction fixe, valeur qui augmente	colinéaire à $\vec{v}$, même sens
Rectiligne ralenti	direction fixe, valeur qui diminue	colinéaire à $\vec{v}$, sens opposé
Rectiligne uniformément varié	$v(t) = at + v_0$	constant, colinéaire à la trajectoire
Circulaire uniforme	tangent, valeur constante	centripète, $a = v^2/R$
Circulaire non uniforme	tangent, valeur variable	$a_T = dv/dt$ et $a_N = v^2/R$

9. Exploiter un enregistrement du mouvement

Au labo – Chronophotographie et pointage vidéo

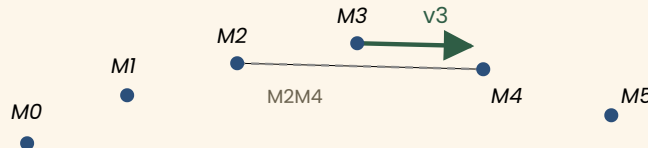
- **Enregistrement** : on filme le mouvement (smartphone fixé sur un pied, perpendiculaire au plan du mouvement), avec un **objet étalon** de longueur connue (règle de 1 m) dans le même plan.
- **Pointage** : avec un logiciel (Tracker, Aviméca, Latis Pro...), on définit l'échelle grâce à l'étalon, on place l'origine et les axes, puis on clique sur la position du système image par image. L'intervalle entre deux images est $\tau = \frac{1}{f}$, où f est le nombre d'images par seconde (à 25 images/s , $\tau = 0,040 \text{ s}$).
- **Exploitation** : on obtient un tableau (t_i, x_i, y_i) , qu'on exporte vers un tableur ou vers Python pour calculer les vitesses et les accélérations (méthode ci-dessous).

Méthode – Vitesse et accélération à partir d'un pointage

Les points $M_0, M_1, M_2, \dots$ sont séparés d'une même durée τ . On approche la dérivée par un taux de variation **centré** sur le point étudié :

$$\vec{v}_i \approx \frac{\overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}}}{2\tau} \quad \text{puis} \quad \vec{a}_i \approx \frac{\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}}{2\tau}$$

En coordonnées : $v_{x,i} \approx \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\tau}$, etc. Pour **représenter** $\vec{v}_i$, on le trace à partir de M_i , parallèle à $\overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}}$, avec une échelle choisie (ex. : 1 cm pour $0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$). Pour $\vec{a}_i$, on construit la différence $\Delta \vec{v} = \vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}$ en mettant les deux vecteurs bout à bout.



Le vecteur vitesse v_3 est tracé en M_3 , parallèle au segment M_2M_4 ; sa longueur dépend de l'échelle choisie.

2 Les pièges à éviter

Attention – Les erreurs classiques

- « **Vitesse constante, donc accélération nulle.** » Faux dès que la trajectoire est courbe ! Dans un mouvement circulaire uniforme, $a = v^2/R \neq 0$. Seul le mouvement **rectiligne** uniforme a une accélération nulle.
- **Oublier de convertir.** Les formules s'utilisent en unités SI : $\text{km} \cdot \text{h}^{-1} \rightarrow \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (diviser par 3,6), $\text{cm} \rightarrow \text{m}$, $\text{min} \rightarrow \text{s}$, $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1} \rightarrow \text{période en s}$.
- **Orienter $\vec{u}_N$ vers l'extérieur.** Il pointe **vers le centre** du cercle. La « force centrifuge » que tu ressens dans un virage n'est pas une accélération vers l'extérieur : c'est ton corps qui tend à continuer tout droit.
- **Se tromper de durée dans le pointage.** Entre M_{i-1} et M_{i+1} , il s'écoule 2τ , pas τ . Et le vecteur $\vec{v}_i$ se trace **au point** M_i , pas au milieu du segment.
- **Confondre v et v_x .** La norme $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ n'est pas la somme $v_x + v_y$; une coordonnée peut être négative, une norme jamais.

3 Avec Python

Capacité numérique : représenter des vecteurs accélération à partir d'un pointage. Nacelle de manège pointée toutes les $\tau = 0,20 \text{ s}$ (cercle de rayon $R = 2,00 \text{ m}$, période $T = 4,0 \text{ s}$) : on calcule $\vec{v}$ puis $\vec{a}$ par la méthode centrée et on vérifie la direction de $\vec{a}$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

tau = 0.20                                     # durée entre deux images (s)
x = np.array([2.000, 1.902, 1.618, 1.176, 0.618, 0.000, -0.618, -1.176]) # m
y = np.array([0.000, 0.618, 1.176, 1.618, 1.902, 2.000, 1.902, 1.618])   # m
# Vitesse au point i : (M(i+1) - M(i-1)) / (2 tau)      -> points 1 à 6
vx, vy = (x[2:] - x[:-2]) / (2*tau), (y[2:] - y[:-2]) / (2*tau)
# Accélération au point i : (v(i+1) - v(i-1)) / (2 tau) -> points 2 à 5
```

Python

```

ax, ay = (vx[2:] - vx[:-2]) / (2*tau), (vy[2:] - vy[:-2]) / (2*tau)
for k in range(len(ax)):
    i = k + 2                                # numéro du point
    v = np.hypot(vx[k+1], vy[k+1])          # norme de la vitesse en Mi
    a = np.hypot(ax[k], ay[k])              # norme de l'accélération en Mi
    # angle entre a et le vecteur MO (de M vers le centre O)
    c = (ax[k]*(-x[i]) + ay[k]*(-y[i])) / (a * np.hypot(x[i], y[i]))
    ang = np.degrees(np.arccos(min(1, c)))
    print(f"M{i} : v = {v:.2f} m/s  a = {a:.2f} m/s²  angle(a, MO) = {ang:.1f}°")
plt.plot(x, y, "o"); plt.axis("equal")        # trajectoire
plt.quiver(x[2:6], y[2:6], ax, ay, angles="xy", color="red") # vecteurs a
plt.show()
# Résultat affiché :
# M2 : v = 3.09 m/s  a = 4.78 m/s²  angle(a, MO) = 0.0°
# M3 : v = 3.09 m/s  a = 4.78 m/s²  angle(a, MO) = 0.0°
# M4 : v = 3.09 m/s  a = 4.77 m/s²  angle(a, MO) = 0.0°
# M5 : v = 3.09 m/s  a = 4.77 m/s²  angle(a, MO) = 0.0°

```

Interprétation. La vitesse est constante et l'angle entre $\vec{a}$ et $\overrightarrow{MO}$ est nul : l'accélération est bien **centripète**. Sur la figure, les flèches rouges pointent toutes vers le centre. Valeurs théoriques : $v = 2\pi R/T \approx 3,14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $a = v^2/R \approx 4,93 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. La méthode sous-estime un peu ces valeurs (2 % et 3 %) car les points sont espacés de 18° ; l'écart diminue si τ diminue. Et $v^2/R = 3,09^2/2,00 \approx 4,77$: cohérent.

4 Exercices

Exercice 1 – Quel mouvement ? ★

Donner la nature du mouvement (référentiel terrestre) et décrire le vecteur accélération (nul, de même sens que $\vec{v}$, de sens opposé, centripète...).

1. Un palet de hockey glisse en ligne droite sur la glace à $12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ constants.
2. Un TGV freine en ligne droite, sa vitesse diminue régulièrement.
3. La pointe de la trotteuse d'une horloge.
4. Une bille lâchée tombe verticalement ; sa vitesse augmente de $9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ chaque seconde.

Exercice 2 – Dériver les équations horaires ★

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, un point M a pour équations horaires $x(t) = 1,5 t^2 - 2,0 t$ et $y(t) = 3,0 t$ (x, y en m, t en s).

1. Établir les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération.
2. Calculer la valeur de la vitesse à $t = 2,0 \text{ s}$.
3. À quelle date v_x s'annule-t-elle ? Que vaut alors v ?
4. Le mouvement est-il rectiligne ? Justifier.

Exercice 3 – La centrifugeuse ★★

Dans une centrifugeuse de laboratoire, un tube tourne sur un cercle de rayon $R = 10 \text{ cm}$ à la fréquence de $3\,000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ constante.

1. Calculer la période T du mouvement, puis la vitesse v du tube.
2. Caractériser le vecteur accélération (direction, sens, valeur).
3. Exprimer cette accélération en multiple de $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Pourquoi dit-on que les particules du tube « subissent environ $1\,000 g$ » ?

Exercice 4 – Bille sur un plan incliné ★★

Une bille roule en ligne droite le long d'un plan incliné. Un pointage vidéo donne les abscisses suivantes, avec $\tau = 0,10 \text{ s}$ entre deux positions :

Point	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
$x \text{ (cm)}$	2,4	5,4	9,6	15,0	21,6	29,4

1. Calculer les vitesses v_1, v_2, v_3 et v_4 en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
2. Calculer les accélérations a_2 et a_3 . Conclure sur la nature du mouvement.
3. Pourquoi ne peut-on pas calculer v_0 ni v_5 avec cette méthode ?

Exercice 5 – Type bac : le 200 mètres ★★★

On étudie, dans le référentiel terrestre, le mouvement du centre de masse d'une sprinteuse lors d'un 200 m. **Document 1 – Le départ.** Sa vitesse augmente linéairement de 0 à $10,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pendant les 4,0 premières secondes ; on assimile cette phase à un mouvement rectiligne.

Document 2 – Le virage. Elle court ensuite dans un virage, arc de cercle de rayon $R = 36,5 \text{ m}$, à la vitesse constante de $10,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Document 3 – La fin du virage. Sur les 2,0 dernières secondes du virage, sa vitesse diminue régulièrement de $10,0$ à $9,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1. Départ : nature du mouvement, valeur de l'accélération, distance parcourue.
2. Virage : nommer le mouvement ; exprimer puis calculer l'accélération dans le repère de Frenet. Comparer à $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
3. Sur un schéma, représenter la sprinteuse dans le virage, les vecteurs $\vec{u}_T, \vec{u}_N, \vec{v}$ et $\vec{a}$ (sans échelle).
4. Fin du virage : calculer a_T , puis a_N et a à l'instant où $v = 9,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. $\vec{a}$ est-il encore dirigé vers le centre ?

5 Teste-toi (QCM)

- 1 Si $x(t) = 3t^2 + 2$ (en m, t en s), l'accélération a_x vaut :
A. $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ B. $6t \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ C. $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ D. $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- 2 Dans un mouvement circulaire uniforme, le vecteur accélération est :
A. nul B. tangent à la trajectoire
C. centripète, de valeur v^2/R D. dirigé vers l'extérieur du cercle
- 3 Une voiture roule à $36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ constants dans un virage de rayon 50 m . Son accélération vaut :
A. 0 B. $0,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ C. $2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ D. $26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

- 4 Un mobile part du repos avec une accélération constante $a = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ en ligne droite. Distance parcourue en 3,0 s :
- A. 6,0 m B. 9,0 m C. 12 m D. 18 m
- 5 Une voiture freine en ligne droite. Son vecteur accélération est :
- A. nul B. de même sens que $\vec{v}$
 C. perpendiculaire à $\vec{v}$ D. de sens opposé à $\vec{v}$
- 6 Une moto prend un virage de rayon 25 m en accélérant : à un instant, $v = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $a_T = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. La valeur de son accélération est :
- A. $2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ B. $4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ C. $4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ D. $6,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

L'essentiel à retenir

- Toujours préciser le **référentiel**.
- $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (en m).
- $\vec{v} = d\vec{OM}/dt$ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$), tangent à la trajectoire ; $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.
- $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$), vers l'intérieur de la courbe.
- MRU : $\vec{a} = \vec{0}$, $x = v_0t + x_0$.
- MRUV : $v = at + v_0$, $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$; départ en $x_0 = 0$: $v^2 - v_0^2 = 2ax$.
- Frenet : $\vec{a} = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N$ avec $a_T = dv/dt$, $a_N = v^2/R$ et $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$.
- MCU : $a = v^2/R$ centripète, $v = 2\pi R/T$.
- Pointage : $v_i \approx M_{i-1}M_{i+1}/(2\tau)$ et $a_i \approx (v_{i+1} - v_{i-1})/(2\tau)$.

6 Corrigés

Exercice 1

1. Mouvement **rectiligne uniforme** : $\vec{a} = \vec{0}$.
2. Mouvement **rectiligne uniformément ralenti** : $\vec{a}$ constant, colinéaire à $\vec{v}$ et de **sens opposé**.
3. Mouvement **circulaire uniforme** (un tour en 60 s) : $\vec{a}$ **centripète**, de valeur v^2/R .
4. Mouvement **rectiligne uniformément accéléré** : $\vec{a}$ vertical vers le bas (même sens que $\vec{v}$), de valeur $9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (la vitesse gagne $9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ par seconde).

Exercice 2

1. $v_x = \frac{dx}{dt} = 3,0t - 2,0$ et $v_y = \frac{dy}{dt} = 3,0 \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1})$; $a_x = \frac{dv_x}{dt} = 3,0$ et $a_y = 0 \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2})$.
2. À $t = 2,0 \text{ s}$: $v_x = 3,0 \times 2,0 - 2,0 = 4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_y = 3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, donc $v = \sqrt{4,0^2 + 3,0^2} = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
3. $v_x = 0 \iff t = \frac{2,0}{3,0} \approx 0,67 \text{ s}$. Alors $v = |v_y| = 3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$: c'est la vitesse minimale.
4. Non : $\vec{a} = 3,0\vec{i}$ n'est pas colinéaire à $\vec{v}$ (qui a toujours $v_y = 3,0 \neq 0$), donc la direction de $\vec{v}$ change : la trajectoire est courbe (c'est une parabole).

Exercice 3

1. $3\,000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1} = 50 \text{ tr} \cdot \text{s}^{-1}$, donc $T = \frac{1}{50} = 2,0 \times 10^{-2} \text{ s}$. $v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \times 0,10}{0,020} \approx 31 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (plus de $110 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$!).
2. Mouvement circulaire uniforme : $\vec{a}$ est **centripète** (dirigé vers l'axe de rotation), de valeur $a = \frac{v^2}{R} = \frac{31,4^2}{0,10} \approx 9,9 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
3. $\frac{a}{g} = \frac{9,87 \times 10^3}{9,81} \approx 1,0 \times 10^3$: l'accélération vaut environ $1\,000 g$. C'est ce qui permet de séparer rapidement les constituants d'un mélange selon leur densité.

Exercice 4

1. On convertit en mètres et on utilise $v_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\tau}$ avec $2\tau = 0,20 \text{ s}$:
 $v_1 = \frac{0,096 - 0,024}{0,20} = 0,36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_2 = \frac{0,150 - 0,054}{0,20} = 0,48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_3 = \frac{0,216 - 0,096}{0,20} = 0,60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_4 = \frac{0,294 - 0,150}{0,20} = 0,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
2. $a_2 = \frac{v_3 - v_1}{2\tau} = \frac{0,60 - 0,36}{0,20} = 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $a_3 = \frac{v_4 - v_2}{0,20} = \frac{0,72 - 0,48}{0,20} = 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. La vitesse augmente de $0,12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ toutes les $0,10 \text{ s}$: l'accélération est constante et de même sens que $\vec{v}$. Le mouvement est **rectiligne uniformément accéléré**.
3. Il faudrait connaître M_{-1} (pour v_0) ou M_6 (pour v_5) : la méthode centrée a besoin d'un point de chaque côté.

Exercice 5

1. Trajectoire rectiligne (modèle) et vitesse qui augmente linéairement : mouvement **rectiligne**

uniformément accéléré. $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10,0 - 0}{4,0} = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Distance : $x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \times 2,5 \times 4,0^2 = 20 \text{ m}$.

2. Mouvement **circulaire uniforme.** Dans le repère de Frenet : $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N = \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$ car v est constante. $a = \frac{10,0^2}{36,5} \approx 2,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, soit environ $0,28 g$ (un peu plus du quart de g).

3. $\vec{u}_T$ et $\vec{v}$ sont tangents au virage, dans le sens de la course ; $\vec{u}_N$ et $\vec{a}$ sont perpendiculaires à la trajectoire, dirigés vers le centre du virage.

4. $a_T = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{9,0 - 10,0}{2,0} = -0,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $a_N = \frac{9,5^2}{36,5} \approx 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $a = \sqrt{0,50^2 + 2,47^2} \approx 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Le vecteur $\vec{a}$ n'est plus exactement dirigé vers le centre : comme $a_T < 0$, il est incliné **vers l'arrière** (du côté opposé au mouvement), d'un angle d'environ 11° par rapport à $\vec{u}_N$.

QCM

1. C : $v_x = 6t$ puis $a_x = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. · 2. C : $a_T = 0$, il ne reste que $a_N = v^2/R$ vers le centre. · 3. C : $v = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $a = 10^2/50 = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (D vient d'un oubli de conversion : $36^2/50 \approx 26$; B correspond à $36/50$). · 4. B : $x = \frac{1}{2} \times 2,0 \times 3,0^2 = 9,0 \text{ m}$. · 5. D : la valeur de la vitesse diminue, donc $\vec{a}$ est opposé à $\vec{v}$. · 6. C : $a_N = 10^2/25 = 4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $a = \sqrt{2,0^2 + 4,0^2} \approx 4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (D : on n'additionne pas les valeurs, les composantes sont perpendiculaires).