

Mouvement des satellites et des planètes

L'ISS file à près de 28 000 km/h et fait le tour de la Terre en une heure et demie... sans moteur allumé. Pourquoi ne tombe-t-elle pas ? En fait, elle tombe sans arrêt : bienvenue dans la mécanique céleste !

Ce que tu vas savoir faire

- Exprimer la force d'attraction gravitationnelle et le champ de gravitation d'un astre
- Déterminer les vecteurs vitesse et accélération d'un satellite en orbite circulaire et montrer que son mouvement est uniforme
- Établir l'expression de la vitesse $v = \sqrt{GM/r}$ et de la période de révolution
- Énoncer les trois lois de Kepler, établir et exploiter la troisième dans le cas circulaire
- Caractériser un satellite géostationnaire et calculer son altitude
- Déterminer la masse d'un astre et tester les lois de Kepler avec Python

À revoir avant de commencer

- Loi de la gravitation universelle et champ de gravitation (1re)
- Repère de Frenet : accélérations tangentielle et normale (fiche 9)
- Deuxième loi de Newton (fiche 10)
- Mouvement circulaire uniforme : $v = 2\pi r/T$
- Puissances de 10 et conversions (km → m, jours → s)

1 Le cours

Pourquoi un satellite ne tombe-t-il pas ?

Newton imaginait un canon posé au sommet d'une très haute montagne. Un boulet tiré doucement retombe près du pied de la montagne ; tiré plus vite, il tombe plus loin. Si on le lance **assez vite** (environ $8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ près du sol), il « tombe » en suivant la courbure de la Terre... et ne touche jamais le sol : il est en **orbite**.

Un satellite est donc un objet en **chute libre permanente** : la seule force qui agit sur lui est l'attraction de l'astre. C'est pour cela que les astronautes de l'ISS flottent : ils tombent en même temps que la station (on parle d'impesanteur), alors que la pesanteur, là-haut, est presque aussi forte qu'au sol !

1. La loi de la gravitation universelle (rappel de 1re)

Loi – Gravitation universelle (Newton, 1687)

Deux corps A et B à répartition sphérique de masse, de masses m_A et m_B , dont les centres sont distants de d , exercent l'un sur l'autre des forces attractives, de même droite d'action, de sens opposés et de même valeur :

$$\vec{F}_{A/B} = -G \frac{m_A m_B}{d^2} \vec{u}_{AB} = -\vec{F}_{B/A} \quad \text{et} \quad F = G \frac{m_A m_B}{d^2}$$

F en newtons (N), m_A et m_B en kilogrammes (kg), d en mètres (m), $\vec{u}_{AB}$ vecteur unitaire orienté de A vers B, $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ constante de gravitation universelle.

Définition – Champ de gravitation d'un astre

Un astre sphérique de masse M crée en un point situé à la distance r de son centre un **champ de gravitation** $\vec{G}$ dirigé vers le centre de l'astre, de valeur :

$$\mathcal{G}(r) = \frac{GM}{r^2} \quad (\mathcal{G} \text{ en } \text{N} \cdot \text{kg}^{-1} = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}, M \text{ en kg}, r \text{ en m}).$$

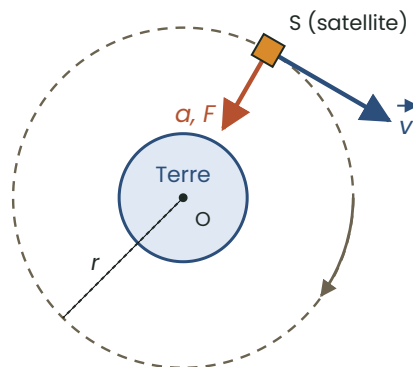
Un corps de masse m placé en ce point subit la force $\vec{F} = m\vec{G}$. Attention : r est mesuré depuis le **centre** de l'astre, donc pour un satellite d'altitude h : $r = R + h$.

Exemple : à l'altitude de l'ISS ($h = 408 \text{ km}$, $r = 6,778 \times 10^6 \text{ m}$), $\mathcal{G} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{(6,778 \times 10^6)^2} \approx 8,67 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, soit encore 88 % de la valeur au sol ($9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

2. Le satellite en orbite circulaire

Définitions – Référentiels et vocabulaire

- **Référentiel géocentrique** : centré sur le centre de la Terre, ses axes pointent vers trois étoiles lointaines « fixes ». On l'utilise pour les satellites de la Terre (Lune, satellites artificiels).
- **Référentiel héliocentrique** : centré sur le centre du Soleil, axes vers trois étoiles lointaines. On l'utilise pour les planètes, comètes, sondes interplanétaires.
- Ces référentiels sont considérés comme **galiléens** (2^e loi de Newton applicable). L'**orbite** est la trajectoire du satellite ; la **période de révolution** T est la durée d'un tour complet.



- vitesse : tangente à l'orbite, valeur constante
- accélération et force : dirigées vers le centre O (centripètes)
- $r = R + h$: distance au centre de l'astre

Satellite en orbite circulaire dans le référentiel géocentrique : la force de gravitation (donc l'accélération) est centripète.

Démonstration – Le mouvement circulaire est uniforme, et $v = \sqrt{GM/r}$ À SAVOIR ÉTABLIR

Système : le satellite S, de masse m , assimilé à un point. **Référentiel :** géocentrique, supposé galiléen. **Bilan des forces :** la seule force est l'attraction de la Terre (on néglige les autres astres et les frottements).

On travaille dans le **repère de Frenet** $(S; \vec{u}_t, \vec{u}_n)$, où $\vec{u}_n$ est dirigé de S vers le centre O. La force s'écrit : $\vec{F} = G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_n$.

2^e loi de Newton : $m \vec{a} = \vec{F}$, donc $\vec{a} = \frac{GM}{r^2} \vec{u}_n$. L'accélération ne dépend pas de la masse m du satellite.

Or, dans le repère de Frenet, $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{r} \vec{u}_n$. Par identification :

- selon $\vec{u}_t$: $\frac{dv}{dt} = 0$, donc v est constante : le mouvement circulaire est **uniforme** ;
- selon $\vec{u}_n$: $\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}$, soit $v^2 = \frac{GM}{r}$ et, comme $v > 0$: $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$.

Propriété – Vitesse d'un satellite en orbite circulaire

Dans le référentiel de l'astre attracteur, un satellite en orbite circulaire de rayon r a un mouvement **circulaire uniforme**, d'accélération centripète $a = \frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}$, et de vitesse :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

v en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, G en $\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, M masse de l'**astre attracteur** en kg, r rayon de l'orbite en m. La vitesse **ne dépend pas de la masse du satellite** et **diminue** quand r augmente : plus un satellite est loin, plus il est lent.

Méthode – Étudier le mouvement d'un satellite (ou d'une planète)

1. Préciser le **système** et le **référentiel** (géocentrique pour un satellite de la Terre, héliocentrique pour une planète, « jovicentrique » pour une lune de Jupiter...).
2. Faire le **bilan des forces** : uniquement la force gravitationnelle de l'astre central.
3. Appliquer la **2^e loi de Newton** et projeter dans le **repère de Frenet**.
4. Identifier les composantes : tangentielle ($dv/dt = 0$, mouvement uniforme) et normale ($v^2/r = GM/r^2$).
5. Convertir toutes les données en **unités SI** ($r = R + h$ en mètres, T en secondes) avant l'application numérique.

Exemple résolu – Vitesse et période de l'ISS

Calculer la vitesse de l'ISS ($h = 408 \text{ km}$) puis la durée d'un tour. Mêmes données que plus haut.

Solution

Vitesse : $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{6,778 \times 10^6}} \approx 7,66 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, soit environ $27\,600 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Période : le mouvement est uniforme, la distance parcourue en un tour est le périmètre $2\pi r$: $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \times 6,778 \times 10^6}{7,66 \times 10^3} \approx 5,56 \times 10^3 \text{ s}$, soit environ **92,6 min** (1 h 33 min). L'ISS fait plus de 15 tours de la Terre par jour.

3. Période de révolution et lois de Kepler

Démonstration – Troisième loi de Kepler (cas circulaire)

À SAVOIR ÉTABLIR

En un tour, le satellite parcourt $2\pi r$ à la vitesse constante v : $T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$.

En élevant au carré : $T^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{GM}$, donc :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Ce rapport ne dépend que de la masse M de l'astre attracteur : il est **le même pour tous ses satellites**.

Propriété – Période de révolution sur une orbite circulaire

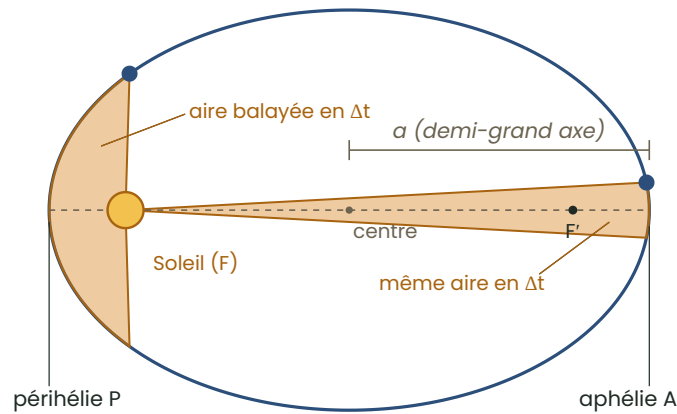
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} \iff \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

T en secondes (s), r en mètres (m), M en kg. Pour la Terre : $\frac{4\pi^2}{GM_T} \approx 9,91 \times 10^{-14} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$; pour le Soleil ($M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$) : $\frac{4\pi^2}{GM_S} \approx 2,97 \times 10^{-19} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$.

Les trois lois de Kepler (dans le référentiel héliocentrique)

- Loi des orbites :** la trajectoire du centre d'une planète est une **ellipse** dont le centre du Soleil occupe l'un des **foyers**.
- Loi des aires :** le segment [Soleil-planète] balaie des **aires égales** pendant des **durées égales**.
- Loi des périodes :** le carré de la période de révolution T est proportionnel au cube du demi-grand axe a de l'ellipse : $\frac{T^2}{a^3} = k$, où k est une constante qui ne dépend que de l'astre attracteur.

Kepler (1571-1630) les a trouvées **empiriquement** à partir des mesures de Tycho Brahe ; Newton les a **expliquées** par la gravitation. Elles s'appliquent à tout système « astre attracteur + satellites » : la Terre et ses satellites, Jupiter et ses lunes...



Lois de Kepler (excentricité très exagérée) : pour balayer la même aire pendant la même durée, la planète parcourt un arc plus long près du périhélie. Elle va donc plus vite près du Soleil.

Interprétation dans le cas d'une orbite circulaire

- Un cercle est une ellipse particulière dont les deux foyers sont confondus avec le centre, et le demi-grand axe a est le rayon r (1^{re} loi).
- Sur un cercle, des aires égales balayées en des durées égales correspondent à des arcs de même longueur : la vitesse est constante, le mouvement est **uniforme** (2^e loi). On retrouve le résultat de la démonstration par la loi de Newton.
- La 3^e loi donne $k = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM}{a^3}$: Newton a expliqué la constante de Kepler. Pour deux satellites d'un même astre, $\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$: par exemple, Mars ($a = 1,52$ UA) a une période $T = 1,52^{3/2} \approx 1,87$ an (on raisonne par rapport à la Terre : 1 UA, 1 an).

Exemple résolu – Tester la loi des aires avec la Terre

Au périhélie (début janvier), la Terre est à $r_P = 1,471 \times 10^{11}$ m du Soleil et sa vitesse vaut $v_P = 30,29 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. À l'aphélie (début juillet) : $r_A = 1,521 \times 10^{11}$ m et $v_A = 29,29 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Pendant une courte durée Δt , en P ou en A, le rayon balaie un triangle très fin d'aire $\frac{1}{2} r v \Delta t$ (la vitesse v est perpendiculaire au rayon). Ces données vérifient-elles la 2^e loi ?

Solution

La loi des aires impose $\frac{1}{2} r_P v_P \Delta t = \frac{1}{2} r_A v_A \Delta t$, soit $r_P v_P = r_A v_A$.

$r_P v_P = 1,471 \times 10^{11} \times 30,29 \times 10^3 \approx 4,456 \times 10^{15} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $r_A v_A = 1,521 \times 10^{11} \times 29,29 \times 10^3 \approx 4,455 \times 10^{15} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Les deux produits sont égaux à 0,02 % près : la loi des aires est vérifiée. La Terre va plus vite en janvier qu'en juillet.

4. Le satellite géostationnaire

Définition – Satellite géostationnaire

Un satellite est **géostationnaire** s'il reste toujours à la verticale du même point de la surface terrestre. Il doit donc :

- avoir une orbite circulaire dans le **plan de l'équateur** ;
- tourner dans le **même sens** que la Terre (d'ouest en est) ;
- avoir une période égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même dans le référentiel géocentrique : le **jour sidéral**, $T = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s} = 86\,164 \text{ s}$.

Exemple résolu – Altitude d'un satellite géostationnaire

Calculer le rayon de l'orbite géostationnaire, l'altitude et la vitesse du satellite. Données : $G, M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6\,370 \text{ km}$, $T = 86\,164 \text{ s}$.

Solution

On isole r dans la 3^e loi : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \iff r^3 = \frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \iff r = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$.

Application numérique : $r = \left(\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24} \times 86\,164^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \approx 4,21 \times 10^7 \text{ m}$, soit environ 42 150 km.

Altitude : $h = r - R_T \approx 42\,150 - 6\,370 \approx 3,58 \times 10^4 \text{ km}$ (environ 35 800 km).

Vitesse : $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 4,215 \times 10^7}{86\,164} \approx 3,07 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Tous les satellites géostationnaires sont sur cette même orbite unique : c'est une ressource limitée, attribuée au niveau international.

Quelques orbites terrestres utiles

Type d'orbite	Altitude	Période	Exemples
Basse (LEO)	300 à 2 000 km	1 h 30 à 2 h	ISS, Hubble, constellations Internet
Moyenne (MEO)	≈ 20 000 à 23 000 km	12 h à 14 h	GPS, Galileo (navigation)
Géostationnaire (GEO)	≈ 35 800 km	23 h 56 min	télévision, météo (Meteosat)
Lune	≈ 380 000 km	27,3 jours	satellite naturel

5. Déterminer la masse d'un astre

Méthode – « Peser » un astre grâce à l'un de ses satellites

Si l'on connaît le rayon r de l'orbite (quasi circulaire) et la période T d'un satellite, la 3^e loi donne la masse de l'astre **central** :

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2} \quad (M \text{ en kg, } r \text{ en m, } T \text{ en s}).$$

La masse du satellite n'intervient pas : on ne peut pas la déterminer ainsi. Avec plusieurs satellites, on trace T^2 en fonction de r^3 : on obtient une droite passant par l'origine, de pente $k = \frac{4\pi^2}{GM}$, d'où $M = \frac{4\pi^2}{Gk}$.

Exemple résolu – La masse de la Terre grâce à la Lune

La Lune décrit autour de la Terre une orbite quasi circulaire de rayon $r = 3,84 \times 10^8$ m en $T = 27,3$ jours. En déduire la masse de la Terre.

Solution

Conversion : $T = 27,3 \times 24 \times 3\,600 \approx 2,359 \times 10^6$ s.

$$M_T = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2} = \frac{4\pi^2 \times (3,84 \times 10^8)^3}{6,67 \times 10^{-11} \times (2,359 \times 10^6)^2} \approx 6,02 \times 10^{24} \text{ kg}.$$

C'est très proche de la valeur de référence $5,97 \times 10^{24}$ kg (écart inférieur à 1 %, dû notamment au fait que la Lune n'est pas de masse négligeable devant la Terre).

Au labo – Peser Jupiter avec les lunes de Galilée

Galilée a découvert en 1610 quatre lunes de Jupiter. À partir d'une série d'images prises à intervalles réguliers (ou du logiciel Stellarium) : 1) mesurer la distance apparente x entre une lune et le centre de Jupiter ; 2) tracer x en fonction du temps : on obtient une sinusoïde (l'orbite circulaire est vue par la tranche) ; 3) l'amplitude donne le rayon r de l'orbite, la durée d'une oscillation la période T ; 4) recommencer pour chaque lune, vérifier que T^2/r^3 est constant et en déduire la masse de Jupiter.

Résultat attendu : $M_J \approx 1,9 \times 10^{27}$ kg, soit environ 318 masses terrestres.

2 Les pièges à éviter

Attention – Les erreurs classiques

- **Utiliser l'altitude au lieu du rayon de l'orbite.** Dans toutes les formules, r est la distance au **centre** de l'astre : $r = R + h$. Avec h seul, les résultats sont complètement faux.
- **Oublier de convertir.** Les kilomètres en mètres ($\times 10^3$), les jours et les heures en secondes. Une période en heures dans $M = 4\pi^2 r^3 / (G T^2)$ donne une masse fautive d'un facteur $3\,600^2$!
- **Confondre les masses.** Dans $v = \sqrt{GM/r}$ et $T^2/r^3 = 4\pi^2 / (GM)$, M est la masse de l'**astre attracteur** (au centre), jamais celle du satellite.
- **Appliquer la 3^e loi à des astres qui ne tournent pas autour du même centre.** On ne compare pas la Lune (autour de la Terre) et Mars (autour du Soleil) : les constantes k sont différentes.

- **Prendre 24 h pour la période d'un satellite géostationnaire.** La Terre fait un tour sur elle-même en 23 h 56 min 4 s dans le référentiel géocentrique (jour sidéral) ; 24 h est la durée du jour solaire, mesurée par rapport au Soleil.
- **Dire que le satellite n'est soumis à aucune force** ou qu'il est « en apesanteur car la gravité est nulle ». La force de gravitation est bien là : c'est elle qui courbe la trajectoire. Un mouvement circulaire, même uniforme, est un mouvement **accélééré** (le vecteur vitesse change de direction).

3 Avec Python

Le programme demande d'**exploiter des données astronomiques ou satellitaires pour tester les 2^e et 3^e lois de Kepler**. Voici les deux tests.

Test de la 2^e loi : un satellite sur une orbite très allongée

Les satellites russes Molniya ont une orbite très elliptique (périgée à environ 600 km d'altitude, apogée vers 39 700 km, période d'environ 12 h). Les éphémérides donnent, à intervalles réguliers, la position $(x; y)$ et la vitesse $(v_x; v_y)$ du satellite dans le plan de l'orbite (valeurs ci-dessous calculées avec le modèle képlérien de cette orbite). Pendant une durée très courte dt , le rayon Terre-satellite balaie un triangle très fin d'aire $dA = \frac{1}{2} (x v_y - y v_x) dt$: la loi des aires impose que la **vitesse aréolaire** $\frac{dA}{dt} = \frac{x v_y - y v_x}{2}$ soit **constante**.

```
import numpy as np

# Satellite Molniya (orbite très elliptique) dans le référentiel géocentrique.
# Toutes les 1 h 30 : position (x, y) en km et vitesse (vx, vy) en km/s
t = np.array([0.0, 1.5, 3.0, 4.5, 6.0, 7.5, 9.0, 10.5]) # en h
x = np.array([6970, -18347, -34765, -43403, -46069, -43197, -34318, -17546])
y = np.array([0, 17901, 14677, 7832, -149, -8112, -14884, -17868])
vx = np.array([0.000, -4.005, -2.230, -1.018, 0.019, 1.058, 2.282, 4.092])
vy = np.array([9.962, 0.123, -1.056, -1.416, -1.507, -1.409, -1.034, 0.209])

r = np.sqrt(x**2 + y**2) # distance au centre de la Terre (km)
v = np.sqrt(vx**2 + vy**2) # vitesse (km/s)
# Aire balayée par seconde : dA/dt = (x.vy - y.vx)/2 (en km²/s)
vitesse_areolaire = (x * vy - y * vx) / 2

for i in range(len(t)):
    print(f"t = {t[i]:4.1f} h    r = {r[i]:6.0f} km    v = {v[i]:5.2f} km/s"
          f"    dA/dt = {vitesse_areolaire[i]:.4e} km²/s")
```

Python

Résultat affiché :

```
t = 0.0 h    r = 6970 km    v = 9.96 km/s    dA/dt = 3.4718e+04 km²/s
t = 1.5 h    r = 25633 km    v = 4.01 km/s    dA/dt = 3.4718e+04 km²/s
t = 3.0 h    r = 37736 km    v = 2.47 km/s    dA/dt = 3.4721e+04 km²/s
t = 4.5 h    r = 44104 km    v = 1.74 km/s    dA/dt = 3.4716e+04 km²/s
t = 6.0 h    r = 46069 km    v = 1.51 km/s    dA/dt = 3.4714e+04 km²/s
t = 7.5 h    r = 43952 km    v = 1.76 km/s    dA/dt = 3.4724e+04 km²/s
t = 9.0 h    r = 37407 km    v = 2.51 km/s    dA/dt = 3.4725e+04 km²/s
t = 10.5 h   r = 25043 km    v = 4.10 km/s    dA/dt = 3.4724e+04 km²/s
```

Python

Interprétation : la distance r varie d'un facteur 6,6 et la vitesse d'un facteur 6,6 aussi, mais l'aire balayée par seconde reste égale à $3,472 \times 10^4 \text{ km}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ à 0,03 % près : la 2^e loi est vérifiée. Le satellite file à près de $10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ au périégée et se traîne à $1,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ à l'apogée, où il reste longtemps au-dessus de la Russie : c'est tout l'intérêt de cette orbite.

Test de la 3^e loi : les huit planètes

Objectif : tester la 3^e loi de Kepler avec les données réelles des huit planètes et en déduire la masse du Soleil. On vérifie d'abord que T^2/a^3 est constant, puis on teste l'exposant (si $T = C a^n$, alors $\ln T = n \ln a + \ln C$: la pente doit valoir 3/2), et enfin on modélise $T^2 = k a^3$ par une droite passant par l'origine.

```
import numpy as np

G = 6.67e-11          # constante de gravitation (SI)
UA = 1.496e11         # 1 unité astronomique en m
AN = 3.156e7          # 1 an en s

# Demi-grand axe a (UA) et période T (ans) : Mercure, Vénus, Terre, Mars,
# Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune
a_UA = np.array([0.387, 0.723, 1.000, 1.524, 5.203, 9.537, 19.19, 30.07])
T_an = np.array([0.241, 0.615, 1.000, 1.881, 11.86, 29.46, 84.01, 164.8])
a = a_UA * UA         # conversion en mètres
T = T_an * AN         # conversion en secondes

# 1) Le rapport T^2/a^3 est-il constant ? (valeurs en s^2/m^3)
print("T^2/a^3 :", [f"{r:.3e}" for r in T**2 / a**3])

# 2) Test de l'exposant : si T = C·a^n, alors ln T = n·ln a + ln C
n, lnC = np.polyfit(np.log(a), np.log(T), 1)
print(f"exposant n = {n:.3f}")      # Kepler prévoit n = 3/2

# 3) Modèle linéaire T^2 = k·a^3 (droite passant par l'origine)
x, y = a**3, T**2
k = np.sum(x * y) / np.sum(x**2)  # pente des moindres carrés
print(f"pente k = {k:.3e} s^2/m^3")

# 4) Masse du Soleil : k = 4π^2/(G·M) donc M = 4π^2/(G·k)
M = 4 * np.pi**2 / (G * k)
print(f"Masse du Soleil : M = {M:.2e} kg")
```

Python

Résultat affiché :

```
T^2/a^3 : ['2.981e-19', '2.977e-19', '2.975e-19', '2.974e-19', '2.971e-19', '2.977e-19',
'2.971e-19', '2.972e-19']
exposant n = 1.500
pente k = 2.972e-19 s^2/m^3
Masse du Soleil : M = 1.99e+30 kg
```

Python

Interprétation : T^2/a^3 est le même pour toutes les planètes à moins de 0,5 % près, alors que a varie d'un facteur 80 : la 3^e loi est vérifiée, l'exposant vaut bien 1,500 et on retrouve la masse admise du Soleil. Avec matplotlib, le tracé de T^2 en fonction de a^3 donne des points alignés sur une droite passant par l'origine.

4 Exercices

Données communes : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$; $R_T = 6\,370 \text{ km}$.

Exercice 1 – La gravitation en chiffres ★

1. Calculer la valeur de la force exercée par la Terre sur la Lune. Données : $M_L = 7,35 \times 10^{22} \text{ kg}$, distance Terre-Lune $d = 3,84 \times 10^8 \text{ m}$. Que vaut la force exercée par la Lune sur la Terre ?
2. À quelle altitude h le champ de gravitation terrestre est-il égal au quart de sa valeur au sol ?

Exercice 2 – Peser Jupiter ★★

Europe, lune de Jupiter, décrit une orbite quasi circulaire de rayon $r_E = 6,71 \times 10^8 \text{ m}$ en $T_E = 3,55$ jours.

1. Établir l'expression de la masse M_J de Jupiter en fonction de r_E , T_E et G , puis la calculer.
2. Io, autre lune de Jupiter, orbite à $r_I = 4,22 \times 10^8 \text{ m}$. Sans calculer M_J , prévoir sa période en jours.

Exercice 3 – Kepler et les saisons ★★

La Terre est au périhélie ($r_P = 1,471 \times 10^{11} \text{ m}$) début janvier et à l'aphélie ($r_A = 1,521 \times 10^{11} \text{ m}$) début juillet.

1. Énoncer la 2^e loi de Kepler. En quel mois la Terre va-t-elle le plus vite ?
2. Montrer que $\frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P}$ (on admet qu'en P et en A la vitesse est perpendiculaire au rayon) et calculer ce rapport.
3. Un élève affirme : « il fait plus chaud en été car la Terre est plus proche du Soleil ». Que lui répondre (pour l'hémisphère Nord) ?

Exercice 4 – Type bac : le système de navigation Galileo ★★★

Document 1. Galileo est le système européen de navigation par satellites. Ses satellites (masse d'environ 700 kg) évoluent sur des orbites circulaires à l'altitude $h_G = 23\,222 \text{ km}$. Le système américain GPS utilise des satellites dont la période de révolution vaut $T_{GPS} = 11 \text{ h } 58 \text{ min}$.

Document 2. Période de rotation propre de la Terre dans le référentiel géocentrique : $T_0 = 86\,164 \text{ s}$.

1. Préciser le référentiel d'étude et le supposer galiléen. Donner l'expression vectorielle de la force exercée par la Terre sur un satellite Galileo de masse m , en utilisant un vecteur unitaire que l'on définira.
2. En appliquant la 2^e loi de Newton dans le repère de Frenet, montrer que le mouvement du satellite est uniforme et établir l'expression de sa vitesse. Calculer v .
3. Établir l'expression de la période T_G et la calculer (en heures et minutes).
4. Un satellite Galileo est-il géostationnaire ? Justifier par deux arguments.
5. À l'aide de la 3^e loi de Kepler, déterminer l'altitude des satellites GPS.
6. On remplace un satellite Galileo par un satellite deux fois plus lourd placé sur la même orbite. Sa période change-t-elle ? Justifier.

5 Teste-toi (QCM)

- La vitesse d'un satellite en orbite circulaire de rayon r autour d'un astre de masse M vaut :
 A. $\sqrt{GM}r$ B. $\sqrt{GM/r}$
 C. GM/r^2 D. $\sqrt{GM/r^2}$
- On multiplie par 4 le rayon de l'orbite circulaire d'un satellite. Sa période est multipliée par :
 A. 2 B. 4
 C. 8 D. 16
- Le vecteur accélération d'un satellite en orbite circulaire est :
 A. nul, car le mouvement est uniforme B. tangent à la trajectoire
 C. dirigé vers le centre de l'astre, de valeur v^2/r D. dirigé vers l'extérieur de l'orbite
- Selon la 2^e loi de Kepler, une planète sur une orbite elliptique :
 A. va plus vite près du Soleil B. va plus vite loin du Soleil
 C. a une vitesse constante D. parcourt des arcs égaux en des durées égales
- Un satellite géostationnaire :
 A. peut survoler Paris en restant immobile au-dessus B. a une période de 24 h exactement
 C. tourne dans le plan de l'équateur, dans le sens de rotation de la Terre D. est immobile dans le référentiel géocentrique
- Deux satellites de masses m et $2m$ sont sur la même orbite circulaire. Le plus lourd :
 A. va deux fois plus vite B. va deux fois moins vite
 C. a la même vitesse D. a une période deux fois plus grande

L'essentiel à retenir

- Gravitation : $F = G \frac{m_A m_B}{d^2}$ ($G = 6,67 \times 10^{-11}$ SI ; F en N, m en kg, d en m).
- Champ de gravitation : $\mathcal{G} = \frac{GM}{r^2}$ en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, avec $r = R + h$.
- Référentiel géocentrique (satellites de la Terre), héliocentrique (planètes).
- Orbite circulaire : mouvement **uniforme**, accélération **centripète** $a = \frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}$.
- Vitesse : $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, indépendante de la masse du satellite.
- Période : $T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ en s.
- Kepler 1 : ellipse, Soleil à un foyer. Kepler 2 : aires égales en durées égales (plus rapide au périhélie).
- Kepler 3 : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$, même valeur pour tous les satellites d'un astre.
- Géostationnaire : plan équatorial, même sens que la Terre, $T = 86\,164$ s, $h \approx 35\,800$ km.
- Masse d'un astre : $M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$ (unités SI !).

6 Corrigés

Exercice 1

1. $F = G \frac{M_T M_L}{d^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24} \times 7,35 \times 10^{22}}{(3,84 \times 10^8)^2} \approx 1,98 \times 10^{20} \text{ N}$. D'après la loi des actions réciproques, la Lune exerce sur la Terre une force de **même valeur** $1,98 \times 10^{20} \text{ N}$, de sens opposé.
2. $\mathcal{G}$ varie en $1/r^2$: il est divisé par 4 quand r double, soit $R_T + h = 2R_T$ et $h = R_T = 6\,370 \text{ km}$.

Exercice 2

1. Référentiel « jovien » galiléen, orbite circulaire : $\frac{T_E^2}{r_E^3} = \frac{4\pi^2}{GM_J}$, d'où $M_J = \frac{4\pi^2 r_E^3}{GT_E^2}$. Avec $T_E = 3,55 \times 86\,400 \approx 3,067 \times 10^5 \text{ s}$: $M_J = \frac{4\pi^2 \times (6,71 \times 10^8)^3}{6,67 \times 10^{-11} \times (3,067 \times 10^5)^2} \approx 1,90 \times 10^{27} \text{ kg}$.
2. Même astre central : $T_I = T_E (r_I/r_E)^{3/2} = 3,55 \times (4,22/6,71)^{3/2} \approx 1,77 \text{ jour}$.

Exercice 3

1. Le segment Soleil-Terre balaie des aires égales en des durées égales. Près du périhélie (rayon plus court), l'arc parcouru est plus long : la Terre va le plus vite **début janvier**.
2. Aires balayées pendant Δt : $\frac{1}{2} r_P v_P \Delta t = \frac{1}{2} r_A v_A \Delta t$, soit $\frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P} = \frac{1,521}{1,471} \approx 1,034$: la Terre va environ 3,4 % plus vite en janvier qu'en juillet.
3. Faux : en juillet, la Terre est au plus **loin** du Soleil. Les saisons sont dues à l'**inclinaison de l'axe de rotation** terrestre (environ 23°).

Exercice 4 (type bac)

1. Référentiel géocentrique. Avec $\vec{u}$ unitaire dirigé du satellite vers le centre de la Terre : $\vec{F} = G \frac{M_T m}{r^2} \vec{u}$, où $r = R_T + h_G$.
2. 2^e loi de Newton : $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{GM_T}{r^2} \vec{u}_n$ (avec $\vec{u}_n = \vec{u}$). Frenet : $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{r} \vec{u}_n$. Donc $\frac{dv}{dt} = 0$ (uniforme) et $\frac{v^2}{r} = \frac{GM_T}{r^2}$, d'où $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$. Avec $r = 6\,370 + 23\,222 = 29\,592 \text{ km} = 2,9592 \times 10^7 \text{ m}$: $v \approx 3,67 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
3. $T_G = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}$; A.N. : $T_G = 2\pi \sqrt{(2,9592 \times 10^7)^3 / (6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24})} \approx 5,07 \times 10^4 \text{ s}$, soit environ **14 h 05 min**.
4. Non : sa période (14 h 05 min) diffère de T_0 (23 h 56 min) et son altitude n'est pas celle de l'orbite géostationnaire ($\approx 35\,800 \text{ km}$).
5. $T_{GPS} = 11 \times 3\,600 + 58 \times 60 = 43\,080 \text{ s}$; 3^e loi : $r_{GPS} = \left(\frac{GM_T T_{GPS}^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \approx 2,66 \times 10^7 \text{ m}$, d'où $h_{GPS} = r_{GPS} - R_T \approx 26\,550 - 6\,370 \approx 2,02 \times 10^4 \text{ km}$.
6. Non : $T = 2\pi \sqrt{r^3 / (GM_T)}$ ne dépend pas de la masse du satellite.

QCM : 1. B · 2. C ($4^{3/2} = 8$) · 3. C (uniforme mais accéléré : centripète) · 4. A · 5. C (orbite équatoriale, $T = 23 \text{ h } 56 \text{ min}$) · 6. C (v indépendante de m).