

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Deux droites qui ne se croisent jamais sont-elles forcément parallèles ? Sur une feuille, oui... mais dans l'espace, pas du tout ! Bienvenue dans la troisième dimension.

Ce que tu vas savoir faire

- Calculer avec des vecteurs de l'espace et exprimer un vecteur comme combinaison linéaire à partir d'une figure
- Démontrer que des vecteurs sont colinéaires ou coplanaires, que des points sont alignés ou coplanaires
- Reconnaître une base, décomposer un vecteur et lire des coordonnées dans un repère de l'espace
- Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans
- Écrire une représentation paramétrique d'une droite et tester l'appartenance d'un point

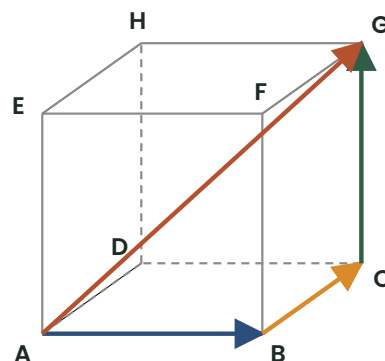
À revoir avant de commencer

- Vecteurs du plan : relation de Chasles, colinéarité, coordonnées (2de, 1re)
- Repérage dans le plan : coordonnées d'un vecteur, d'un milieu
- Solides usuels (cube, pavé droit, pyramide) et leur représentation en perspective (collège)
- Résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues

1 Le cours

Du plan à l'espace : ce qui change, ce qui ne change pas

Bonne nouvelle : presque tout ce que tu sais sur les vecteurs du plan reste vrai dans l'espace (relation de Chasles, colinéarité, milieu, coordonnées...). Ce qui change : on a **trois** directions indépendantes au lieu de deux, donc **trois** coordonnées, et de nouvelles situations apparaissent. Par exemple, deux droites peuvent ne jamais se couper **sans être parallèles** : pense à une route sur un pont et à une voie ferrée qui passe dessous, dans une autre direction. Tout au long de la fiche, on s'appuie sur le cube $ABCDEFGH$ ci-contre.



Dans le cube, pour aller de A à G, on peut suivre trois arêtes : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ (arêtes cachées en pointillés).

1. Vecteurs de l'espace

Définition – Vecteur de l'espace

Comme dans le plan, un **vecteur** $\vec{u}$ est caractérisé par une **direction**, un **sens** et une **norme** (longueur). Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est associé à la translation qui envoie A sur B . On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

La **relation de Chasles** reste valable : pour tous points A, B, C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. On définit aussi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $k\overrightarrow{AB}$ (k réel), $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ et le vecteur nul $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$, avec les mêmes règles de calcul que dans le plan.

Exemple résolu – Calculer dans le cube

Exprimer $\overrightarrow{EC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$, puis simplifier $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{HD}$.

Solution

On passe par A : $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Or $ABCD$ est un carré, donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.
D'où $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$.

Les arêtes « verticales » sont parallèles et de même longueur : $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{EA}$. Donc
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB}$.

Définition – Combinaison linéaire

Un vecteur $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. De même avec trois vecteurs : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{t}$.

Exemple : $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ (avec $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$).

2. Vecteurs colinéaires et droites de l'espace

Définition et propriétés – Colinéarité, droite

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si l'un est le produit de l'autre par un réel : $\vec{v} = k\vec{u}$ (ou $\vec{u} = \vec{0}$). Ils ont alors la même direction.

Soit A un point et $\vec{u} \neq \vec{0}$. La **droite** d passant par A et de **vecteur directeur** $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires :

$$M \in d \iff \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t\vec{u}.$$

- Deux droites sont **parallèles** si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Trois points A, B, C sont **alignés** si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

3. Plans de l'espace et vecteurs coplanaires

Un plan est « une feuille infinie ». Pour le décrire, il suffit d'un point et de **deux directions différentes** : en partant de A , on peut atteindre n'importe quel point du plan en avançant d'une certaine quantité dans la direction de $\vec{u}$, puis dans celle de $\vec{v}$.

Définition – Plan défini par un point et deux vecteurs

Soit A un point et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs **non colinéaires**. Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x \vec{u} + y \vec{v} \quad \text{avec } x, y \text{ réels.}$$

Le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est une **base** de la direction du plan, et $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un **repère** de $\mathcal{P}$. Trois points non alignés A, B, C définissent un unique plan (ABC) , dirigé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Définition et propriété – Vecteurs coplanaires

Trois vecteurs sont **coplanaires** si, en les dessinant à partir d'un même point O , on obtient quatre points O, A, B, C situés dans un même plan.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires $\iff$ il existe des réels a, b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Quatre points A, B, C, D sont **coplanaires** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Exemple résolu – Coplanarité dans le cube

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires. Qu'en déduire pour la droite (BD) et le plan (AFH) ?

Solution

Avec Chasles et les faces carrées : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Donc

$$\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}.$$

$\overrightarrow{BD} = 1 \times \overrightarrow{AH} + (-1) \times \overrightarrow{AF}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$ (non colinéaires) : les trois vecteurs sont coplanaires.

Le vecteur directeur $\overrightarrow{BD}$ de la droite (BD) est donc dans la direction du plan (AFH) : la droite (BD) est **parallèle** au plan (AFH) (et même strictement, car B n'est pas dans ce plan).

4. Bases, repères et coordonnées

Théorème et définition – Base et décomposition

Si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont trois vecteurs **non coplanaires**, alors tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace s'écrit de **façon unique** :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

On dit que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une **base** de l'espace et que $(x; y; z)$ sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans cette base.

Si O est un point, $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un **repère** de l'espace. Les coordonnées d'un point M sont celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$: $M(x; y; z) \iff \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (x : abscisse, y : ordonnée, z : cote).

Lire une décomposition sur une figure, c'est trouver un chemin fait de segments parallèles aux vecteurs de la base (comme $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ dans le cube).

Exemple résolu – Coordonnées dans le cube

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Donner les coordonnées des sommets du cube, du centre K de la face $BCGF$ et du vecteur $\overrightarrow{EC}$.

Solution

$A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$; $C(1; 1; 0)$ car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; de même $F(1; 0; 1)$, $H(0; 1; 1)$ et $G(1; 1; 1)$ car $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

K est le milieu de la diagonale $[BG]$: $K\left(\frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{0+1}{2}\right) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Et $\overrightarrow{EC}(1 - 0; 1 - 0; 0 - 1) = (1; 1; -1)$, ce qui correspond bien à $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$.

Propriétés – Calculs en coordonnées (dans un repère quelconque)

Pour $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $\vec{u}(x; y; z)$, $\vec{v}(x'; y'; z')$ et k réel :

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$; milieu de $[AB]$: $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$;
- $\vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y'; z + z')$ et $k\vec{u}(kx; ky; kz)$;
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\iff$ leurs coordonnées sont **proportionnelles** (il existe k tel que $x' = kx$, $y' = ky$ et $z' = kz$, si $\vec{u} \neq \vec{0}$).

La formule de la norme $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ n'est valable que dans un repère **orthonormé** (voir fiche 12).

Méthode – Tester alignement et coplanarité avec des coordonnées

Alignement de A, B, C : on calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et on cherche k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$; il faut que le **même** k convienne pour les trois coordonnées.

Coplanarité de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ($\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires) : on cherche a, b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. On obtient un système de **3 équations à 2 inconnues** : on résout avec deux équations, puis on **vérifie** la troisième. Si elle est vérifiée, les vecteurs sont coplanaires ; sinon, ils ne le sont pas (et forment une base).

Exemple résolu – Deux tests

1. Les points $A(1; 2; -1)$, $B(3; -1; 2)$ et $C(-3; 8; -7)$ sont-ils alignés ?
2. Les vecteurs $\vec{u}(1; 0; 2)$, $\vec{v}(0; 1; -1)$ et $\vec{w}(2; 3; 1)$ sont-ils coplanaires ?

Solution

1. $\overrightarrow{AB}(2; -3; 3)$ et $\overrightarrow{AC}(-4; 6; -6)$. On a $-4 = -2 \times 2$, $6 = -2 \times (-3)$, $-6 = -2 \times 3$: $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$. Les points sont alignés.

2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (la 1^{re} coordonnée de $\vec{v}$ est nulle, pas celle de $\vec{u}$). On cherche a, b

$$\text{tels que } \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} : \begin{cases} 2 = a \\ 3 = b \\ 1 = 2a - b \end{cases} \quad \text{Les deux premières lignes donnent } a = 2, b = 3; \text{ la troisième :}$$

$2 \times 2 - 3 = 1 \checkmark$. Donc $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$: les vecteurs sont coplanaires.

5. Positions relatives de droites et de plans

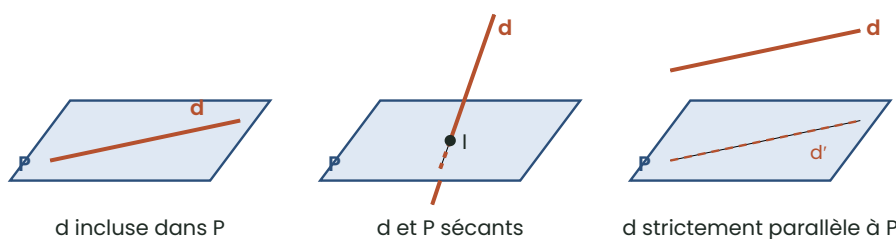
Propriété – Les cas possibles

Deux droites de l'espace sont :

- soit **coplanaires** (dans un même plan) : elles sont alors **sécantes** (un seul point commun) ou **parallèles** (strictement parallèles ou confondues) ;
- soit **non coplanaires** : aucun point commun, et pourtant pas parallèles.

Une droite d et un plan $\mathcal{P}$: d est incluse dans $\mathcal{P}$, ou d coupe $\mathcal{P}$ en un seul point, ou d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$ (aucun point commun).

Deux plans : ils sont **parallèles** (strictement parallèles ou confondus) ou **sécants** ; dans ce cas, leur intersection est une **droite**.



Les trois positions d'une droite d et d'un plan $\mathcal{P}$. À droite, d est parallèle à une droite d' du plan $\mathcal{P}$.

Propriétés – Parallélisme

- Une droite d est **parallèle à un plan $\mathcal{P}$** si et seulement si elle est parallèle à une droite de $\mathcal{P}$, autrement dit si un vecteur directeur de d est une combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires dirigeant $\mathcal{P}$.
- Deux plans sont **parallèles** si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à l'autre plan (ils ont alors la même direction).
- Si deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan, les deux droites d'intersection sont **parallèles**.
- **Théorème du toit** : si $d_1 \subset \mathcal{P}_1$ et $d_2 \subset \mathcal{P}_2$ sont deux droites parallèles, et si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite Δ , alors Δ est parallèle à d_1 et à d_2 .

Exemple résolu – Deux plans parallèles dans le cube

Montrer que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.

Solution

$BDHF$ est un rectangle (deux arêtes verticales parallèles et de même longueur), donc $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$: la droite (FH) est parallèle à (BD) , donc au plan (BDE) .

$EDCF$ est un parallélogramme car $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FC}$ (dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, les deux vecteurs ont pour coordonnées $(0; 1; -1)$). Donc (FC) est parallèle à (ED) , donc au plan (BDE) .

Les droites (FH) et (FC) sont sécantes en F et contenues dans (CFH) : ce plan contient deux droites sécantes parallèles à (BDE) . Les plans sont donc parallèles (et distincts, car $F \notin (BDE)$).

6. Représentation paramétrique d'une droite (introduction)

Propriété – Représentation paramétrique

Dans un repère, la droite d passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

C'est la traduction de $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ en coordonnées : une « recette » qui fabrique tous les points de d quand t parcourt $\mathbb{R}$ (imagine un mobile M qui avance à vitesse constante $\vec{u}$, t étant le temps). Ce système est **une** représentation paramétrique de d (il y en a une infinité : on peut changer de point et de vecteur directeur). Chaque valeur du paramètre t donne un point de d . Les représentations paramétriques et les équations de plans sont étudiées en détail dans la fiche 13.

Exemple résolu – Appartenance d'un point à une droite

Soit d la droite passant par $A(1; -2; 3)$ et dirigée par $\vec{u}(2; 1; -1)$. Écrire une représentation paramétrique de d , donner deux autres points de d , puis dire si $B(-3; -4; 5)$ et $C(3; -1; 1)$ appartiennent à d .

Solution

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Pour $t = 1$: $(3; -1; 2)$; pour $t = 2$: $(5; 0; 1)$.

$B \in d$? On cherche **un même** t : $1 + 2t = -3$ donne $t = -2$; alors $y = -2 + (-2) = -4$ ✓ et $z = 3 - (-2) = 5$ ✓. Donc $B \in d$ (paramètre $t = -2$).

$C \in d$? $1 + 2t = 3$ donne $t = 1$; alors $y = -1$ ✓ mais $z = 3 - 1 = 2 \neq 1$ ✗. Donc $C \notin d$.

2 Les pièges à éviter

Attention – Les erreurs classiques

- « **Pas de point commun, donc parallèles** » : faux dans l'espace ! Dans le cube, (AB) et (CG) ne se coupent pas et ne sont pas parallèles : elles sont **non coplanaires**.
- **Croire que trois vecteurs deux à deux non colinéaires forment une base.** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires deux à deux, mais ils sont coplanaires (tous dans la face $ABCD$).
- **Oublier de vérifier la 3^e équation** (ou la 3^e coordonnée) : pour la colinéarité, le coefficient k doit être le même pour les trois coordonnées ; pour la coplanarité, les valeurs de a et b trouvées avec deux équations doivent vérifier la troisième.
- **Utiliser deux paramètres différents** pour tester si un point est sur une droite : c'est le **même** t dans les trois lignes de la représentation paramétrique.
- « **d parallèle à $\mathcal{P}$ donc d parallèle à toutes les droites de $\mathcal{P}$** » : faux. (EF) est parallèle au plan (ABC) , mais pas à la droite (BC) .
- **Calculer une longueur avec $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dans un repère non orthonormé** : la formule est alors fausse.

3 Avec Python

Le programme officiel ne fixe pas d'algorithme pour ce chapitre. Voici des fonctions utiles pour **vérifier** tes calculs : colinéarité (par les « produits en croix », comme pour les vecteurs du plan), appartenance d'un point à une droite, et points d'une droite paramétrée.

```
def vecteur(A, B):                                # coordonnées du vecteur AB
    return (B[0] - A[0], B[1] - A[1], B[2] - A[2])

def colineaires(u, v):                            # tous les « produits en croix » sont nuls
    (a, b, c), (d, e, f) = u, v
    return a*e - b*d == 0 and a*f - c*d == 0 and b*f - c*e == 0

def appartient(M, A, u):                          # M sur d(A, u) <=> AM et u colinéaires
    return colineaires(vecteur(A, M), u)

def point(A, u, t):                              # point de paramètre t de la droite d(A, u)
    return (A[0] + t*u[0], A[1] + t*u[1], A[2] + t*u[2])

A, u = (1, -2, 3), (2, 1, -1)
print(appartient((-3, -4, 5), A, u), appartient((3, -1, 1), A, u))
print([point(A, u, t) for t in [0, 1, 2]])
P, Q, R = (1, 2, -1), (3, -1, 2), (-3, 8, -7)
print(appartient(R, P, vecteur(P, Q)))           # R est-il sur la droite (PQ) ?

# Affichage :
# True False
# [(1, -2, 3), (3, -1, 2), (5, 0, 1)]
# True
```

On retrouve les résultats des exemples résolus : $B \in d$, $C \notin d$, les points de paramètres 0, 1, 2, et l'alignement des trois points du paragraphe 4.

4 Exercices

Exercice 1 ★

$ABCDEFGH$ est le cube de la figure du cours.

1. Simplifier $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$ puis $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DA}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{HB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Exercice 2 ★

Dans un repère de l'espace, on donne $A(2; -1; 0)$, $B(4; 0; 3)$, $C(0; -2; -3)$ et $D(1; 1; 1)$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Les points A, B, C sont-ils alignés ?
2. Le point D appartient-il à la droite (AB) ?
3. Calculer les coordonnées du milieu de $[BD]$, puis celles du point E tel que $ABDE$ soit un parallélogramme.

Exercice 3 ★★

On donne $\vec{u}(1; 2; -1)$, $\vec{v}(3; 0; 2)$, $\vec{w}(-1; 4; -4)$ et $\vec{t}(1; 1; 1)$.

1. Montrer que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.
2. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})$ est une base de l'espace.
3. Décomposer le vecteur $\vec{s}(2; 7; -1)$ dans cette base.

Exercice 4 ★★★

Dans le cube $ABCDEFGH$, donner la position relative, en justifiant :

1. des droites (AB) et (CG) ; (EG) et (AC) ; (AG) et (EC) ;
2. de la droite (FG) et du plan (ABC) ; de la droite (BH) et du plan (ADE) ;
3. des plans (ABF) et (DCG) ; des plans (ACG) et (BDH) .

Exercice 5 ★★★

Dans un repère, d_1 est la droite passant par $A(1; 0; 2)$ de vecteur directeur $\vec{u}(1; -1; 1)$.

1. Donner une représentation paramétrique de d_1 .
2. d_2 passe par $D(0; 5; 1)$ et est dirigée par $\vec{v}(-2; 2; -2)$. Montrer que d_1 et d_2 sont strictement parallèles.
3. d_3 passe par $B(-1; -4; 6)$ et est dirigée par $\vec{w}(2; 1; -1)$. Montrer que d_1 et d_3 sont sécantes et donner leur point d'intersection.
4. d_4 passe par $C(2; 3; 0)$ et est dirigée par $\vec{r}(1; 2; -1)$. Montrer que d_1 et d_4 sont non coplanaires.

Exercice 6 ★★★ – type bac

$ABCDEFGH$ est un cube. On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On note I le milieu de $[AE]$ et J le milieu de $[CG]$.

1. Donner les coordonnées des points B, H, I et J .
2. Montrer que $BJHI$ est un parallélogramme. Que peut-on en déduire pour les points B, J, H, I ?
3. a) Donner une représentation paramétrique de la droite (IJ) et de la droite (BH) .
b) Montrer que (IJ) et (BH) sont sécantes en un point Ω dont on donnera les coordonnées.
c) Vérifier que Ω appartient à la droite (AG) .
4. Montrer que la droite (IJ) est strictement parallèle au plan (ABC) .
5. Soit M le milieu de $[HG]$. Le point M appartient-il au plan (BJI) ?

5 Teste-toi (QCM)

- 1 Dans le cube $ABCDEFGH$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$ est égal à :
A. $\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AG}$ **C.** $\overrightarrow{AF}$ **D.** $\overrightarrow{AH}$
- 2 Deux droites distinctes de l'espace qui ne sont pas parallèles sont :
A. forcément sécantes **B.** forcément non coplanaires
C. sécantes ou non coplanaires **D.** forcément perpendiculaires
- 3 Le vecteur $\vec{u}(2; -4; 6)$ est colinéaire au vecteur :
A. $(1; 2; 3)$ **B.** $(-1; 2; -3)$ **C.** $(4; -8; 10)$ **D.** $(-2; 4; 6)$
- 4 Le milieu du segment $[AB]$, avec $A(1; 3; -2)$ et $B(5; -1; 4)$, a pour coordonnées :
A. $(4; -4; 6)$ **B.** $(2; 2; -3)$ **C.** $(3; 1; 1)$ **D.** $(6; 2; 2)$
- 5 La droite de représentation paramétrique $x = 1 + 2t, y = -t, z = 3 + t$ ($t \in \mathbb{R}$) passe par le point :
A. $(3; 1; 4)$ **B.** $(2; -1; 1)$ **C.** $(3; -1; 4)$ **D.** $(5; -2; 6)$
- 6 Si $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, alors les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:
A. forment une base de l'espace **B.** sont coplanaires
C. sont forcément colinéaires **D.** vérifient $\vec{w} = \vec{0}$

L'essentiel à retenir

- **Chasles** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- **Colinéaires** : $\vec{v} = k\vec{u}$.
- **Droite** $(A, \vec{u})$: $M \in d \iff \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.
- **Plan** $(A, \vec{u}, \vec{v})$: $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
- **Coplanaires** : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ (vérifier la 3^e équation).
- **Base** : 3 vecteurs non coplanaires ; $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- **Deux droites** : sécantes, parallèles ou **non coplanaires**.
- **Droite et plan** : incluse, sécante ou strictement parallèle.
- **Deux plans** : parallèles ou sécants selon une droite.
- **Représentation paramétrique** : $x = x_A + ta, y = y_A + tb, z = z_A + tc$.

6 Corrigés

Exercice 1

- $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$ (face $BCGF$), donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Ensuite $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DF}$ (en utilisant $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$ et Chasles).
- $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$, soit $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$.

Exercice 2

- $\overrightarrow{AB}(2; 1; 3)$ et $\overrightarrow{AC}(-2; -1; -3)$: $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$, donc A, B, C sont alignés ; A est même le milieu de $[BC]$.
- $\overrightarrow{AD}(-1; 2; 1)$. S'il existait k avec $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$, la 1^{re} coordonnée donnerait $k = -\frac{1}{2}$ et la 2^e $k = 2$: impossible. Donc $D \notin (AB)$.
- Milieu de $[BD]$: $(\frac{4+1}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{3+1}{2}) = (\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; 2)$. $ABDE$ parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} \iff x_D - x_E = 2, y_D - y_E = 1, z_D - z_E = 3$, d'où $E(-1; 0; -2)$.

Exercice 3

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ($\vec{v}$ a une 2^e coordonnée nulle, pas $\vec{u}$). On cherche $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$: (1) $a + 3b = -1$, (2) $2a = 4$, (3) $-a + 2b = -4$. (2) donne $a = 2$, puis (1) donne $b = -1$; on vérifie (3) : $-2 + 2 \times (-1) = -4$ ✓. Donc $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$: coplanaires.
- Si $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v}$: $2a = 1$ donne $a = \frac{1}{2}$, puis $a + 3b = 1$ donne $b = \frac{1}{6}$; 3^e coordonnée : $-\frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \neq 1$ ✗. Donc $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$ ne sont pas coplanaires : ils forment une base.
- On cherche $\vec{s} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{t}$: (1) $a + 3b + c = 2$, (2) $2a + c = 7$, (3) $-a + 2b + c = -1$. (1) - (3) : $2a + b = 3$. (2) : $c = 7 - 2a$; dans (1) : $-a + 3b = -5$. Avec $b = 3 - 2a$: $-7a + 9 = -5$, donc $a = 2, b = -1, c = 3$. Ainsi $\vec{s} = 2\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{t}$ (vérification : $(2 - 3 + 3; 4 + 3; -2 - 2 + 3) = (2; 7; -1)$ ✓).

Exercice 4

- (AB) et (CG) : **non coplanaires** : si elles étaient dans un même plan, ce plan contiendrait A, B et C , ce serait donc (ABC) ; or $G \notin (ABC)$. (EG) et (AC) : **parallèles**, car $ACGE$ est un rectangle, donc $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$. (AG) et (EC) : **sécantes**, ce sont les diagonales du rectangle $ACGE$ (elles se coupent au centre du cube).
- $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$ et $(BC) \subset (ABC)$, donc (FG) est parallèle à (ABC) ; comme $F \notin (ABC)$, elle est **strictement parallèle**. H appartient à la face $ADHE$, donc au plan (ADE) , mais B n'y appartient pas : (BH) et (ADE) sont **sécants en H**.
- (ABF) et (DCG) sont les plans de deux faces opposées : **strictement parallèles**. (ACG) et (BDH) sont distincts et ont en commun le centre O de $ABCD$ (milieu de $[AC]$ et de $[BD]$) et le centre O' de $EFGH$ (milieu de $[EG]$ et de $[FH]$) : ils sont **sécants** selon la droite (OO') .

Exercice 5

1. Une représentation paramétrique de d_1 est : $x = 1 + t, y = -t, z = 2 + t$, avec $t \in \mathbb{R}$.
2. $\vec{v} = -2\vec{u}$: les droites sont parallèles. $D \in d_1$? $1 + t = 0$ donne $t = -1$, puis $y = 1 \neq 5$: $D \notin d_1$. Les droites sont **strictement parallèles**.
3. d_3 : $x = -1 + 2s, y = -4 + s, z = 6 - s$ ($s \in \mathbb{R}$; on prend une autre lettre !). On résout (1) $1 + t = -1 + 2s$, (2) $-t = -4 + s$, (3) $2 + t = 6 - s$. (2) donne $t = 4 - s$; dans (1) : $5 - s = -1 + 2s$, donc $s = 2$ et $t = 2$. On vérifie (3) : $2 + 2 = 4$ et $6 - 2 = 4$ ✓. Les droites sont **sécantes** au point de paramètre $t = 2$: $(3; -2; 4)$.
4. $\vec{r}(1; 2; -1)$ et $\vec{u}(1; -1; 1)$ ne sont pas colinéaires (1^{res} coordonnées égales, 2^{es} différentes) : d_1 et d_4 ne sont pas parallèles. Point commun ? (1) $1 + t = 2 + s$, (2) $-t = 3 + 2s$, (3) $2 + t = -s$. (1) donne $t = 1 + s$; dans (2) : $-1 - s = 3 + 2s$, donc $s = -\frac{4}{3}$ et $t = -\frac{1}{3}$. Dans (3) : $2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ mais $-s = \frac{4}{3}$ ✗. Pas de point commun et pas parallèles : d_1 et d_4 sont **non coplanaires**.

Exercice 6

1. $B(1; 0; 0), H(0; 1; 1); E(0; 0; 1)$ donc $I(0; 0; \frac{1}{2})$; $C(1; 1; 0)$ et $G(1; 1; 1)$ donc $J(1; 1; \frac{1}{2})$.
2. $\overrightarrow{BJ}(0; 1; \frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{IH}(0; 1; \frac{1}{2})$: $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IH}$, donc $BJHI$ est un parallélogramme. En particulier, les quatre points B, J, H, I sont **coplanaires**.
3. a) $\overrightarrow{IJ}(1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{BH}(-1; 1; 1)$. $(IJ) : x = t, y = t, z = \frac{1}{2}$ ($t \in \mathbb{R}$) ; $(BH) : x = 1 - s, y = s, z = s$ ($s \in \mathbb{R}$).
b) On résout $t = 1 - s, t = s, \frac{1}{2} = s : s = \frac{1}{2}, t = \frac{1}{2}$, et la 1^{re} équation est vérifiée ($\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$). Les droites sont sécantes en $\Omega(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ (c'est logique : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu).
c) $\overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$, donc $(AG) : x = y = z = k$ ($k \in \mathbb{R}$). Pour $k = \frac{1}{2}$, on obtient $\Omega : \Omega \in (AG)$. C'est le **centre du cube**.
4. $\overrightarrow{IJ}(1; 1; 0) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ est une combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : (IJ) est parallèle à (ABC) . De plus $I \notin (ABC)$ (sa cote vaut $\frac{1}{2}$, alors que tous les points de (ABC) ont une cote nulle) : elle est strictement parallèle.
5. $M(\frac{1}{2}; 1; 1), \overrightarrow{BM}(-\frac{1}{2}; 1; 1), \overrightarrow{BI}(-1; 0; \frac{1}{2})$. $M \in (BJI) \iff \overrightarrow{BM} = a\overrightarrow{BJ} + b\overrightarrow{BI}$: (1) $-\frac{1}{2} = -b$, (2) $1 = a$, (3) $1 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. Donc $b = \frac{1}{2}, a = 1$, puis $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \neq 1$ ✗. M n'appartient pas au plan (BJI) .

QCM

1. C, car $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$.
2. C : elles peuvent se couper ou non.
3. B, car $(-1; 2; -3) = -\frac{1}{2}\vec{u}$.
4. C.
5. C ($t = 1$).
6. B : $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.