

Orthogonalité et distances dans l'espace

Dans un cube, la grande diagonale est-elle perpendiculaire à un plan qui « coupe un coin » ? Et comment mesurer la distance d'un point à un plan... sans règle ? Le produit scalaire répond aux deux questions.

Ce que tu vas savoir faire

- Calculer un produit scalaire dans l'espace avec la formule adaptée (cosinus, projection, coordonnées)
- Calculer une longueur et un angle dans un repère orthonormé
- Démontrer que deux droites sont orthogonales, ou qu'une droite est orthogonale à un plan
- Reconnaître un vecteur normal à un plan
- Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite ou sur un plan
- Calculer la distance d'un point à une droite ou à un plan

À revoir avant de commencer

- Produit scalaire dans le plan (1re) : définition, formules, orthogonalité
- Vecteurs, droites et plans de l'espace (fiche 11)
- Coordonnées d'un vecteur, milieu, colinéarité
- Théorème de Pythagore, trigonométrie dans le triangle rectangle

1 Le cours

L'idée : se ramener au plan

En 1re, tu as découvert le produit scalaire **dans le plan**. Bonne nouvelle : dans l'espace, on n'a presque rien à réapprendre ! Deux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ dessinés à partir d'un même point A sont toujours dans **un même plan** (celui qui contient A , B et C) : on calcule donc $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans ce plan, exactement comme en 1re. À quoi cela sert-il ? À **détecter les angles droits** (produit scalaire nul), à **calculer des longueurs et des angles**, et à trouver le point d'un plan **le plus proche** d'un point donné.

1. Le produit scalaire dans l'espace

Définition – Produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Si l'un des deux est nul, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Sinon :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta),$$

où θ est l'angle géométrique (entre 0 et π) formé par deux représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même origine.

En particulier, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ (on note aussi $\vec{u}^2$).

Propriété – Les autres expressions (comme en 1re)

- **Avec un projeté** : si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) , alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$. Cela vaut $AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens, et $-AB \times AH$ sinon.
- **Avec des normes** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.
- **Règles de calcul** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
- **Identités remarquables** : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Exemple résolu – Dans un cube, sans coordonnées

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1 (face $ABCD$ en bas, E au-dessus de A , F au-dessus de B , etc. : voir la figure plus bas). Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$ puis $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AH}$.

Solution

1. Le segment $[BG]$ est dans la face $BCGF$, qui est perpendiculaire à l'arête $[AB]$: le projeté orthogonal de G sur (AB) est donc B . D'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 1$.
2. $[AF]$, $[AH]$ et $[FH]$ sont des diagonales de faces carrées d'arête 1 : elles mesurent toutes $\sqrt{2}$. Le triangle AFH est donc **équilatéral** et $\widehat{FAH} = 60^\circ$. Ainsi $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AH} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos(60^\circ) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.

2. Dans un repère orthonormé : tout devient calcul

Théorème – Expression analytique

Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormée** si ses trois vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de norme 1 (un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé si sa base l'est). Dans une base orthonormée :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \implies \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

et, pour deux points A et B : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Pour gagner de la place, on écrira souvent les coordonnées d'un vecteur en ligne : $\vec{u}(x; y; z)$.

Exemple résolu – Calculer un angle

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1; 0; 2)$, $B(3; 1; 4)$ et $C(1; 4; 6)$. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Solution

Coordonnées : $\overrightarrow{AB}(2; 1; 2)$ et $\overrightarrow{AC}(0; 4; 4)$. **Produit scalaire :** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 0 + 1 \times 4 + 2 \times 4 = 12$.

Normes : $AB = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$ et $AC = \sqrt{0 + 16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

On égalise les deux expressions : $3 \times 4\sqrt{2} \times \cos \widehat{BAC} = 12$, donc $\cos \widehat{BAC} = \frac{12}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où $\widehat{BAC} = 45^\circ$ (soit $\frac{\pi}{4}$ rad).

3. Orthogonalité dans l'espace

Définition – Vecteurs et droites orthogonaux

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur).
- Deux droites sont **orthogonales** lorsque leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Elles ne sont **pas forcément sécantes** ! Si elles sont orthogonales **et** sécantes, on dit qu'elles sont **perpendiculaires**.

Par exemple, dans le cube, les droites (AE) et (BC) sont orthogonales (la parallèle à (BC) passant par A est (AD) , perpendiculaire à (AE)), mais elles ne se coupent pas : elles ne sont même pas coplanaires.

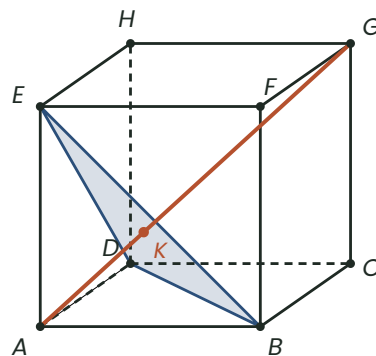
Définition – Droite orthogonale à un plan

Une droite d est **orthogonale à un plan $\mathcal{P}$** si elle est orthogonale à **toutes** les droites de $\mathcal{P}$.

Théorème – Caractérisation

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à **deux droites sécantes** de ce plan.

Autrement dit : si $\vec{u}$ dirige d et si $\vec{v}, \vec{w}$ sont deux vecteurs **non colinéaires** de $\mathcal{P}$, alors $d \perp \mathcal{P} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$.



Dans le cube, la diagonale (AG) traverse le triangle BDE en son centre de gravité K .

Pourquoi deux droites suffisent-elles ?

Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, tout vecteur $\vec{t}$ du plan s'écrit $\vec{t} = a\vec{v} + b\vec{w}$ (car $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base du plan). Par linéarité : $\vec{u} \cdot \vec{t} = a\vec{u} \cdot \vec{v} + b\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$. Donc d est orthogonale à toute droite du plan.

Définition et propriétés – Vecteur normal à un plan

Un vecteur **non nul** $\vec{n}$ est **normal** au plan $\mathcal{P}$ si toute droite dirigée par $\vec{n}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$. Alors :

- Le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
- Une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ est **orthogonale** à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{u}$ est **colinéaire** à $\vec{n}$; elle est **parallèle** à $\mathcal{P}$ (ou contenue dans $\mathcal{P}$) si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.
- Deux plans sont **parallèles** si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires ; ils sont **perpendiculaires** si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Méthode – Montrer qu'un vecteur $\vec{n}$ est normal à un plan (ABC)

- Vérifier que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont **pas colinéaires** (sinon A, B, C ne définissent pas un plan).
- Calculer $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}$: si les deux sont nuls, $\vec{n}$ est normal à (ABC) .

Exemple résolu – La diagonale du cube

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1, montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE) .

Solution

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Alors $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$ et $G(1; 1; 1)$.

$\overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$, $\overrightarrow{BD}(-1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{BE}(-1; 0; 1)$. Ces deux derniers ne sont pas colinéaires (même 1re coordonnée, mais 3e coordonnées différentes).

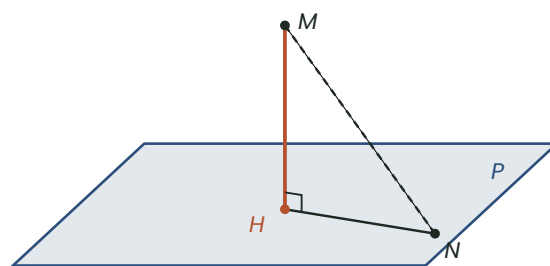
$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = -1 + 1 + 0 = 0 \text{ et } \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = -1 + 0 + 1 = 0.$$

(AG) est orthogonale à deux droites sécantes (BD) et (BE) du plan (BDE) : elle est donc orthogonale à ce plan, et $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal à (BDE) .

4. Projeté orthogonal et distances

Définition – Projeté orthogonal

- Le projeté orthogonal d'un point M sur une **droite** d est le point H de d tel que (MH) soit perpendiculaire à d (et $H = M$ si $M \in d$).
- Le projeté orthogonal de M sur un **plan** $\mathcal{P}$ est le point d'intersection H de $\mathcal{P}$ avec la droite passant par M et orthogonale à $\mathcal{P}$.
Si $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$: $H \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{MH}$ colinéaire à $\vec{n}$.



Le triangle MHN est rectangle en H : l'hypoténuse MN est plus longue que le côté MH .

Théorème – Le projeté est le point le plus proche

Soit H le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$. Alors H est le point de $\mathcal{P}$ **le plus proche** de M : pour tout point N de $\mathcal{P}$, $MN \geq MH$, avec égalité seulement si $N = H$.

La longueur MH s'appelle la **distance du point M au plan $\mathcal{P}$** . On définit de même la distance d'un point à une droite (même démonstration).

Démonstration AU PROGRAMME

Soit N un point quelconque de $\mathcal{P}$. Si $N = H$, alors $MN = MH$. Supposons $N \neq H$.

Les points H et N sont dans $\mathcal{P}$, donc le vecteur $\overrightarrow{HN}$ dirige une droite de $\mathcal{P}$. Or $\overrightarrow{MH}$ est colinéaire à un vecteur normal à $\mathcal{P}$ (ou nul si $M \in \mathcal{P}$), donc $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HN} = 0$.

On développe (relation de Chasles puis identité remarquable) :

$$MN^2 = \|\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HN}\|^2 = MH^2 + 2 \underbrace{\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HN}}_{=0} + HN^2 = MH^2 + HN^2.$$

Comme $N \neq H$, on a $HN^2 > 0$, donc $MN^2 > MH^2$ et, les longueurs étant positives, $MN > MH$.

Conclusion : H est l'unique point de $\mathcal{P}$ qui réalise la plus petite distance à M . (C'est le théorème de Pythagore dans le triangle MHN , rectangle en H .)

Méthode – Calculer un projeté orthogonal (vectoriellement)

- **Sur une droite** passant par A , dirigée par $\vec{u}$: on cherche H tel que $\overrightarrow{AH} = t \vec{u}$ et $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$. On obtient $t = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.
- **Sur un plan** passant par A , de vecteur normal $\vec{n}$: on cherche H tel que $\overrightarrow{MH} = k \vec{n}$ et $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = 0$. On trouve k , puis H , puis la distance $MH = |k| \times \|\vec{n}\|$.

(Dans la fiche 13, on fera ces calculs avec une représentation paramétrique et une équation cartésienne.)

Exemple résolu – Distance d'un point à une droite

On reprend $A(1; 0; 2)$ et $B(3; 1; 4)$. Déterminer le projeté orthogonal H de $M(5; 4; 5)$ sur (AB) , puis la distance de M à (AB) .

Solution

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}(2; 1; 2)$ et $\overrightarrow{AM}(4; 4; 3)$. On cherche H avec $\overrightarrow{AH} = t \vec{u}$, donc $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH} = t \vec{u} - \overrightarrow{AM}$.

$$\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0 \iff t \|\vec{u}\|^2 - \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \iff 9t - (8 + 4 + 6) = 0 \iff t = 2.$$

Donc $\overrightarrow{AH} = 2\vec{u}$ et $H(1 + 4; 0 + 2; 2 + 4)$, soit $H(5; 2; 6)$. **Vérification :** $\overrightarrow{MH}(0; -2; 1)$ et $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0 - 2 + 2 = 0$.

La distance de M à (AB) est $MH = \sqrt{0 + 4 + 1} = \sqrt{5}$.

Exemple résolu – Distance d'un point à un plan

Dans le cube précédent, déterminer le projeté orthogonal K de G sur le plan (BDE) et la distance de G à ce plan.

Solution

On a vu que $\vec{n} = \overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$ est normal à (BDE) . On cherche K tel que $\overrightarrow{GK} = k\vec{n} : K(1 + k; 1 + k; 1 + k)$.

$$K \in (BDE) \iff \overrightarrow{BK} \cdot \vec{n} = 0. \text{ Or } \overrightarrow{BK}(k; 1 + k; 1 + k), \text{ donc } k + (1 + k) + (1 + k) = 0 \iff 3k + 2 = 0 \iff k = -\frac{2}{3}.$$

D'où $K(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$: c'est le centre de gravité du triangle BDE (point K de la figure). La distance de G au plan (BDE) vaut

$$GK = |k| \times \|\vec{n}\| = \frac{2}{3} \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,15.$$

2 Les pièges à éviter

Attention – Les erreurs classiques

- **Confondre « orthogonales » et « perpendiculaires ».** Dans l'espace, deux droites orthogonales peuvent ne pas se couper (comme (AE) et (BC) dans le cube). « Perpendiculaires » exige en plus qu'elles soient sécantes.
- **Vérifier l'orthogonalité avec une seule droite du plan.** Pour montrer $d \perp \mathcal{P}$, il faut **deux** droites **sécantes** (deux vecteurs **non colinéaires**) du plan.
- **Transposer les réflexes du plan.** Dans l'espace, deux droites orthogonales à une même troisième ne sont **pas** forcément parallèles : (AB) et (AD) sont toutes deux orthogonales à (AE) , et elles sont sécantes !
- **Utiliser $xx' + yy' + zz'$ dans un repère qui n'est pas orthonormé.** Cette formule n'est valable que dans une base orthonormée.
- **Écrire $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.** C'est faux en général ; ce sont les **carrés** qui se développent : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
- **Oublier la valeur absolue** dans $MH = |k| \times \|\vec{n}\|$: une distance est toujours positive.

3 Avec Python

Le programme ne liste pas d'algorithme pour ce chapitre, mais ces quelques fonctions permettent de **vérifier** tes calculs (ici sur les exemples du cours). On arrondit avec `round` car l'ordinateur calcule en valeurs approchées : sans arrondi, il afficherait 45,000 000 000 000 01 au lieu de 45.

```

from math import sqrt, acos, degrees

def scal(u, v):
    """Produit scalaire dans un repère orthonormé : xx' + yy' + zz'"""
    return u[0]*v[0] + u[1]*v[1] + u[2]*v[2]

def norme(u):
    return sqrt(scal(u, u))      # ||u|| = racine de u.u

def vect(A, B):
    """Coordonnées du vecteur AB"""
    return [B[i] - A[i] for i in range(3)]

def angle(u, v):
    """Angle géométrique (en degrés) entre deux vecteurs non nuls"""
    return degrees(acos(scal(u, v) / (norme(u) * norme(v))))

def projete_plan(M, A, n):
    """Projeté orthogonal de M sur le plan passant par A, de vecteur normal n.
    On cherche H = M + k*n avec AH.n = 0, ce qui donne k = -AM.n / ||n||^2"""
    k = -scal(vect(A, M), n) / scal(n, n)
    return [M[i] + k*n[i] for i in range(3)]

A, B, C = [1, 0, 2], [3, 1, 4], [1, 4, 6]
print(scal(vect(A, B), vect(A, C)), round(angle(vect(A, B), vect(A, C)), 4))

# Cube : projeté de G(1;1;1) sur le plan (BDE), qui passe par B(1;0;0), normal à (1;1;1)
H = projete_plan([1, 1, 1], [1, 0, 0], [1, 1, 1])
print([round(x, 4) for x in H], round(norme(vect([1, 1, 1], H)), 4))

# Affichage obtenu :
# 12 45.0
# [0.3333, 0.3333, 0.3333] 1.1547

```

4 Exercices

Dans tous les exercices, l'espace est muni d'un repère orthonormé.

Exercice 1 ★

On donne $\vec{u}(1; -2; 3)$, $\vec{v}(4; 1; -2)$ et $\vec{w}(2; 4; 2)$.

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$, puis une mesure de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (arrondie à 0,1 degré).
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils orthogonaux ?
3. Déterminer le réel m tel que $\vec{u}$ et $\vec{t}(m; 1; 1)$ soient orthogonaux.

Exercice 2 ★

Soient $A(2; 1; -1)$, $B(3; 3; 1)$ et $C(4; -1; 0)$. Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en A , puis calculer son aire et la longueur BC .

Exercice 3 ★★

Soient $A(1; 2; 0)$, $B(2; 3; -1)$, $C(1; 3; 1)$ et $\vec{n}(2; -1; 1)$.

1. Montrer que A, B, C définissent un plan et que $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) .
2. Soit $M(4; 3; 1)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur (ABC) , puis la distance de M au plan (ABC) .

Exercice 4 ★★

Soit d la droite passant par $A(1; -1; 0)$ et dirigée par $\vec{u}(1; 2; 2)$, et $M(3; 5; 2)$.

1. Déterminer le point H de d tel que (MH) soit perpendiculaire à d .
2. En déduire la distance du point M à la droite d . Existe-t-il un point de d situé à une distance 2 de M ? Justifier.

Exercice 5 ★★★ (type bac)

On considère les points $O(0; 0; 0)$, $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ et $C(0; 0; 3)$.

1. Montrer que le vecteur $\vec{n}(6; 3; 2)$ est normal au plan (ABC) .
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de O sur le plan (ABC) et en déduire que $OH = \frac{6}{7}$.
3. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$ en prenant pour base le triangle OAB . (Rappel : $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$.)
4. En utilisant cette fois la base ABC , en déduire l'aire du triangle ABC .

5 Teste-toi (QCM)

- 1 Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}(1; 2; -1)$ et $\vec{v}(3; -1; 1)$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$ vaut :
 A. 2
 B. 4
 C. 0
 D. -2
- 2 Si $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ mesure $\frac{\pi}{3}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$ vaut :
 A. 6
 B. $3\sqrt{3}$
 C. $\frac{3}{2}$
 D. 3
- 3 $ABCDEFGH$ est un cube d'arête a . Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$ vaut :
 A. a^2
 B. 0
 C. $a^2\sqrt{3}$
 D. $a\sqrt{3}$
- 4 Une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan de vecteur normal $\vec{n}$ vérifient $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$. Alors la droite est :
 A. orthogonale au plan
 B. parallèle au plan ou contenue dans le plan
 C. sécante au plan en un seul point
 D. on ne peut rien dire

- 5 H est le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$, et N est un point quelconque de $\mathcal{P}$. Alors on a toujours :

A. $MN \leq MH$

B. $MN = MH$

C. $MN \geq MH$

D. $MN = HN$

L'essentiel à retenir

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$; $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.
- Repère orthonormé : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
- $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Droites orthogonales : vecteurs directeurs orthogonaux (pas forcément sécantes).
- $d \perp \mathcal{P} \iff d$ orthogonale à deux droites sécantes de $\mathcal{P}$.
- $\vec{n}$ normal à (ABC) : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ non colinéaires).
- Plan par A normal à $\vec{n}$: $M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
- Projeté H de M sur $\mathcal{P}$: $H \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{MH} = k \vec{n}$.
- H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M ; distance = MH .

Exercice 1

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 4 + (-2) \times 1 + 3 \times (-2) = 4 - 2 - 6 = -4$. $\|\vec{u}\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}$.

$\cos \theta = \frac{-4}{\sqrt{14} \sqrt{21}} = \frac{-4}{\sqrt{294}} \approx -0,233$, donc $\theta \approx 103,5^\circ$ (calculatrice en mode degrés, touche $\cos^{-1}$ ou « arccos »).

2. $\vec{u} \cdot \vec{w} = 2 - 8 + 6 = 0$: oui, $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux. 3. $\vec{u} \cdot \vec{t} = m - 2 + 3 = m + 1$. Donc $\vec{u} \perp \vec{t} \iff m + 1 = 0 \iff m = -1$.

Exercice 2

$\vec{AB}(1; 2; 2)$ et $\vec{AC}(2; -2; 1)$. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 - 4 + 2 = 0$: le triangle est rectangle en A . $AB = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$ et $AC = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$: $AB = AC$, il est isocèle en A .

Aire = $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{9}{2}$. Par Pythagore, $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (on vérifie : $\vec{BC}(1; -4; -1)$ et $\sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18}$).

Exercice 3

1. $\vec{AB}(1; 1; -1)$ et $\vec{AC}(0; 1; 1)$ ne sont pas colinéaires (la 1^{re} coordonnée de $\vec{AC}$ est nulle, pas celle de $\vec{AB}$, et $\vec{AC} \neq \vec{0}$) : A, B, C définissent un plan. $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 2 - 1 - 1 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 - 1 + 1 = 0$: $\vec{n}$ est normal à (ABC) .

2. On cherche H tel que $\vec{MH} = k\vec{n}$: $H(4 + 2k; 3 - k; 1 + k)$. Alors $\vec{AH}(3 + 2k; 1 - k; 1 + k)$ et $\vec{AH} \cdot \vec{n} = 2(3 + 2k) - (1 - k) + (1 + k) = 6 + 6k = 0 \iff k = -1$. Donc $H(2; 4; 0)$.

Distance : $MH = |k| \times \|\vec{n}\| = 1 \times \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$.

Exercice 4

1. $H \in d$: $\vec{AH} = t\vec{u}$, soit $H(1 + t; -1 + 2t; 2t)$. $\vec{MH}(t - 2; 2t - 6; 2t - 2)$ et $\vec{MH} \cdot \vec{u} = (t - 2) + 2(2t - 6) + 2(2t - 2) = 9t - 18$. Donc $\vec{MH} \cdot \vec{u} = 0 \iff t = 2$, et $H(3; 3; 4)$.

2. $\vec{MH}(0; -2; 2)$, donc la distance de M à d est $MH = \sqrt{0 + 4 + 4} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$. Comme H est le point de d le plus proche de M , tout point N de d vérifie $MN \geq 2\sqrt{2} > 2$: aucun point de d n'est à la distance 2 de M .

Exercice 5

1. $\vec{AB}(-1; 2; 0)$ et $\vec{AC}(-1; 0; 3)$ ne sont pas colinéaires (2^e coordonnée nulle pour l'un seulement). $\vec{n} \cdot \vec{AB} = -6 + 6 + 0 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = -6 + 0 + 6 = 0$: $\vec{n}$ est normal à (ABC) .

2. $\vec{OH} = k\vec{n}$, donc $H(6k; 3k; 2k)$ et $\vec{AH}(6k - 1; 3k; 2k)$. $\vec{AH} \cdot \vec{n} = 36k - 6 + 9k + 4k = 49k - 6 = 0 \iff k = \frac{6}{49}$. Ainsi $H(\frac{36}{49}; \frac{18}{49}; \frac{12}{49})$ et $OH = |k| \times \|\vec{n}\| = \frac{6}{49} \times \sqrt{36 + 9 + 4} = \frac{6}{49} \times 7 = \frac{6}{7}$.

3. Le triangle OAB est rectangle en O (dans le plan $z = 0$) : aire = $\frac{1 \times 2}{2} = 1$. La hauteur associée est $OC = 3$ (car (OC) , l'axe des cotes, est orthogonal au plan (OAB)). Donc $V = \frac{1}{3} \times 1 \times 3 = 1$.

4. Avec la base ABC , la hauteur est $OH = \frac{6}{7}$: $1 = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times \frac{6}{7}$, donc $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{3 \times 7}{6} = \frac{7}{2}$.

QCM

1. C ($3 - 2 - 1 = 0$) · 2. D ($2 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3$) · 3. A (le projeté de G sur (AB) est B , donc $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = AB^2 = a^2$) · 4. B ($\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}$: la droite est parallèle au plan, ou incluse dedans) · 5. C (le projeté est le point du plan le plus proche de M)