

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Comment décrire une droite de l'espace avec une seule lettre, et un plan tout entier avec une seule égalité ? Avec ces deux outils, chercher où une droite perce un plan devient une simple équation à résoudre.

Ce que tu vas savoir faire

- Déterminer une représentation paramétrique d'une droite et reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique
- Déterminer une équation cartésienne d'un plan à partir d'un point et d'un vecteur normal, ou de trois points
- Lire un vecteur normal sur une équation cartésienne et tester si un point appartient à un plan
- Étudier la position relative et l'intersection d'une droite et d'un plan, de deux plans, de deux droites
- Calculer le projeté orthogonal d'un point sur un plan et la distance d'un point à un plan

À revoir avant de commencer

- Vecteurs, droites et plans de l'espace, colinéarité, coplanarité (fiche 11)
- Produit scalaire, orthogonalité, vecteur normal, projeté orthogonal (fiche 12)
- Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues
- Équation cartésienne d'une droite du plan (2de, 1re)

1 Le cours

L'idée : un « trajet » pour la droite, un « test » pour le plan

Imagine une fourmi qui part d'un point A et avance en ligne droite, toujours dans la direction d'un vecteur $\vec{u}$. À l'instant t , elle se trouve au point M tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$: ses trois coordonnées dépendent d'un **seul nombre** t . C'est une **représentation paramétrique** de la droite : elle permet de **fabriquer** tous ses points.

Pour un plan, on procède autrement : on donne une **égalité** $ax + by + cz + d = 0$ que les coordonnées d'un point vérifient **si et seulement si** ce point est dans le plan. C'est une **équation cartésienne** : elle permet de **tester** si un point appartient au plan. Dans toute la fiche, l'espace est muni d'un **repère orthonormé** $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

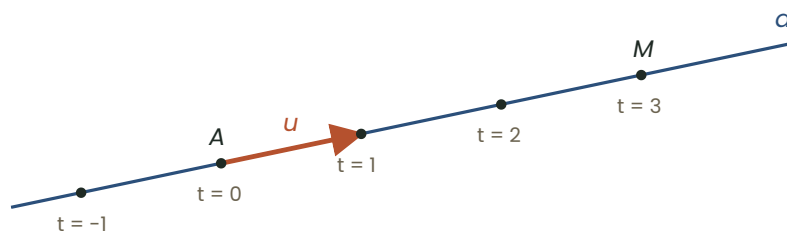
1. Représentation paramétrique d'une droite

Théorème – Représentation paramétrique

Soit d la droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ (non nul). Un point $M(x; y; z)$ appartient à d si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ce système s'appelle une **représentation paramétrique** de d ; le réel t est le **paramètre**.



Chaque valeur du paramètre t donne un point de d : $t = 0$ donne A , $t = 1$ donne $A + u$ (flèche orange), $t = 3$ donne le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 3u$.

Méthode – Lire, écrire et utiliser une représentation paramétrique

- **Lire** : les termes **constants** donnent un point (celui obtenu pour $t = 0$) ; les **coefficients de t** donnent un vecteur directeur. Par exemple, la droite $x = 3 - t, y = 2t, z = 5$ ($t \in \mathbb{R}$) passe par $(3; 0; 5)$ et est dirigée par $\vec{u}(-1; 2; 0)$.
- **Écrire** celle de la droite (AB) : on prend le point A et le vecteur directeur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
- **Tester** si un point C est sur la droite : on cherche t avec la 1^{re} équation, puis on vérifie que **la même valeur** de t convient pour les deux autres.

Exemple résolu – La droite (AB)

Soient $A(1; 2; -1)$ et $B(3; 1; 1)$. Donner une représentation paramétrique de (AB) . Les points $C(7; -1; 5)$ et $D(5; 0; 2)$ sont-ils sur (AB) ?

Solution

$\overrightarrow{AB}(2; -1; 2)$ dirige (AB) , qui passe par A : $(AB) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Point C : $1 + 2t = 7 \iff t = 3$. Avec $t = 3$: $y = 2 - 3 = -1$ et $z = -1 + 6 = 5$. Les trois coordonnées concordent : $C \in (AB)$.

Point D : $1 + 2t = 5 \iff t = 2$. Avec $t = 2$: $y = 0$ (correct) mais $z = -1 + 4 = 3 \neq 2$. Donc $D \notin (AB)$.

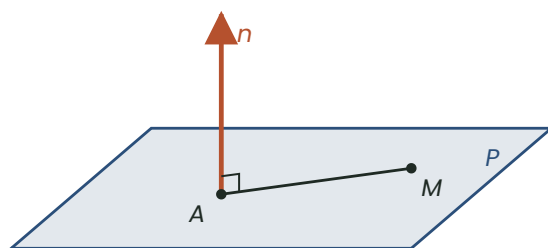
Remarques

- Une droite a **une infinité** de représentations paramétriques (on peut changer de point et de vecteur directeur). Deux systèmes d'apparence différente peuvent donc décrire la même droite.
- En limitant le paramètre, on décrit d'autres ensembles : $t \in [0; 1]$ donne le **segment** $[AB]$ (avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$), $t \geq 0$ donne la **demi-droite** $[AB)$.

2. Équation cartésienne d'un plan

Théorème – Équation cartésienne

- Un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où d est un réel.
- Réciproquement, si a, b, c ne sont pas tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un **plan** de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.



$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \text{ (n en orange).}$$

Démonstration

Sens direct. Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de $\mathcal{P}$. D'après la fiche 12, $M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$, c'est-à-dire $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

Réciproque. Supposons par exemple $a \neq 0$ (les autres cas sont identiques). Le point $A(-\frac{d}{a}; 0; 0)$ vérifie l'équation, et pour tout point $M(x; y; z)$: $ax + by + cz + d = a(x + \frac{d}{a}) + b(y - 0) + c(z - 0) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}$. L'ensemble étudié est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$: c'est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple résolu – Plan défini par un point et un vecteur normal

Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1; -2; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2; -1; 4)$.

Solution

$\mathcal{P}$ a une équation de la forme $2x - y + 4z + d = 0$. Comme $A \in \mathcal{P}$: $2 \times 1 - (-2) + 4 \times 3 + d = 0$, soit $16 + d = 0$, donc $d = -16$.

Conclusion : $\mathcal{P} : 2x - y + 4z - 16 = 0$.

Méthode – Plan défini par trois points A, B, C

1. Vérifier que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2. Chercher $\vec{n}(a; b; c)$ tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$: on obtient 2 équations à 3 inconnues ; on **choisit** une valeur (non nulle) pour l'une des inconnues et on calcule les deux autres.
3. Calculer d en écrivant que A vérifie l'équation, puis **contrôler** avec B et C .

Exemple résolu – Le plan (ABC)

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) avec $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$ et $C(0; 1; 1)$.

Solution

$\overrightarrow{AB}(1; 1; -2)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; 1; -1)$ ne sont pas colinéaires (1res coordonnées opposées, 2es égales).

On cherche $\vec{n}(a; b; c)$ avec
$$\begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ -a + b - c = 0 \end{cases}$$

En additionnant : $2b - 3c = 0$. On choisit $c = 2$: alors $b = 3$, et la 2e équation donne $a = b - c = 1$.
Donc $\vec{n}(1; 3; 2)$.

$(ABC) : x + 3y + 2z + d = 0$ et $A \in (ABC) : 1 + 0 + 4 + d = 0$, d'où $d = -5$. **Bilan :** $x + 3y + 2z - 5 = 0$.

Contrôle : $B : 2 + 3 + 0 - 5 = 0$; $C : 0 + 3 + 2 - 5 = 0$.

3. Positions relatives et intersections

Propriété – Droite et plan

Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

- Si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$: d et $\mathcal{P}$ sont **sécants** en un unique point.
- Si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$: d est **parallèle** à $\mathcal{P}$. Elle est **contenue** dans $\mathcal{P}$ si l'un de ses points est dans $\mathcal{P}$, **strictement parallèle** sinon.

Exemple résolu – Point d'intersection d'une droite et d'un plan

Soit $\mathcal{P} : 2x - y + z - 3 = 0$ et $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$. Montrer que d et $\mathcal{P}$ sont sécants et déterminer

leur point d'intersection I .

Solution

$\vec{u}(1; -1; 3)$ et $\vec{n}(2; -1; 1) : \vec{u} \cdot \vec{n} = 2 + 1 + 3 = 6 \neq 0$, donc d et $\mathcal{P}$ sont sécants.

On **injecte** la représentation paramétrique dans l'équation du plan : $2(1 + t) - (2 - t) + 3t - 3 = 0 \iff 6t - 3 = 0 \iff t = \frac{1}{2}$.

On remplace t par $\frac{1}{2}$ dans la représentation de d : $I(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2})$. **Contrôle :** $2 \times \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 3 = 0$.

Propriété – Deux plans

Deux plans de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont **parallèles** (strictement ou confondus) si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires ; sinon ils sont **sécants** suivant une **droite**.

Exemple résolu – Droite d'intersection de deux plans

Soient $\mathcal{P} : x + y - z - 1 = 0$ et $\mathcal{Q} : x - y + 2z - 3 = 0$. Montrer que ces plans sont sécants et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection Δ .

Solution

$\vec{n}(1; 1; -1)$ et $\vec{n}'(1; -1; 2)$ ne sont pas colinéaires (1^{re} coordonnées égales, 2^{es} opposées) : les plans sont sécants.

Un point $M(x; y; z)$ est sur Δ s'il vérifie les deux équations. On prend z comme paramètre : $z = t$. Il reste le système $x + y = 1 + t$ et $x - y = 3 - 2t$. En additionnant : $2x = 4 - t$, soit $x = 2 - \frac{1}{2}t$; puis $y = 1 + t - x = -1 + \frac{3}{2}t$.

$$\Delta : \begin{cases} x = 2 - \frac{1}{2}t \\ y = -1 + \frac{3}{2}t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{point } (2; -1; 0), \text{ vecteur directeur } (-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1)).$$

Propriété – Deux droites

Soient d et d' de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont **colinéaires** : les droites sont **parallèles** (confondues si elles ont un point commun, strictement parallèles sinon).
- Sinon, on résout le système formé par les deux représentations (avec **deux paramètres différents** t et s) : s'il a une solution, les droites sont **sécantes** ; sinon, elles sont **non coplanaires**.

Exemple résolu – Deux droites non coplanaires

$$d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et } d' : \begin{cases} x = 3 - s \\ y = 1 + s \\ z = 2s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}). \text{ Étudier leur position relative.}$$

Solution

$\vec{u}(1; 2; 1)$ et $\vec{u}'(-1; 1; 2)$ ne sont pas colinéaires ($-1 = -1 \times 1$ mais $1 \neq -1 \times 2$) : les droites ne sont pas parallèles.

On cherche t et s tels que
$$\begin{cases} 1 + t = 3 - s \\ 2t = 1 + s \\ -1 + t = 2s \end{cases}$$
. Les deux premières équations donnent $t + s = 2$ et $2t - s = 1$.

$s = 1$, donc (en additionnant) $3t = 3 : t = 1$ et $s = 1$.

3^e équation : $-1 + 1 = 0$ mais $2s = 2$. Elle n'est pas vérifiée : le système n'a pas de solution, d et d' sont **non coplanaires**.

4. Projeté orthogonal sur un plan et distance

Méthode – Projeté H de M sur le plan $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$

1. Écrire une représentation paramétrique de la droite Δ passant par M et dirigée par $\vec{n}(a; b; c)$ (elle est orthogonale à $\mathcal{P}$).
2. H est le point d'intersection de Δ et $\mathcal{P}$: on injecte, on trouve t , puis H .
3. La distance de M à $\mathcal{P}$ est MH (d'après la fiche 12, c'est la plus petite distance entre M et un point de $\mathcal{P}$).

Exemple résolu – Distance d'un point à un plan

Calculer la distance du point $M(3; 1; 4)$ au plan $\mathcal{P} : x + 2y + 2z - 4 = 0$.

Solution

$\vec{n}(1; 2; 2)$. La droite Δ passant par M et dirigée par $\vec{n} : x = 3 + t, y = 1 + 2t, z = 4 + 2t (t \in \mathbb{R})$.

On injecte : $(3 + t) + 2(1 + 2t) + 2(4 + 2t) - 4 = 0 \iff 9 + 9t = 0 \iff t = -1$. Donc $H(2; -1; 2)$ (contrôle : $2 - 2 + 4 - 4 = 0$).

$\overrightarrow{MH}(-1; -2; -2)$, donc la distance de M à $\mathcal{P}$ vaut $MH = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$.

Pour aller plus loin – Une formule directe

En refaisant ce calcul avec des lettres ($H = M + t\vec{n}$ et $H \in \mathcal{P}$), on trouve $t =$

$-\frac{ax_M + by_M + cz_M + d}{a^2 + b^2 + c^2}$ puis $MH = |t| \times \|\vec{n}\|$, c'est-à-dire :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exemple ci-dessus : $\frac{|3 + 2 + 8 - 4|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$. Cette formule n'est **pas exigible** au programme : au bac, la méthode du projeté (qui donne aussi les coordonnées de H) est celle qu'on attend le plus souvent.

2 Les pièges à éviter

Attention – Les erreurs classiques

- **Mal lire le vecteur normal.** Pour $2x - z + 1 = 0$, il n'y a pas de $y : \vec{n}(2; 0; -1)$, et non $(2; -1; 1)$.
- **Utiliser la même lettre t pour deux droites** quand on cherche leur intersection : le point commun n'est en général pas atteint pour la même valeur du paramètre. Prends t et s .
- **Oublier la troisième équation.** Pour tester un point ou l'intersection de deux droites, la valeur trouvée avec deux équations doit être vérifiée dans la troisième.
- **Croire que deux droites non parallèles sont sécantes.** Dans l'espace, elles peuvent être non coplanaires.
- **Confondre les deux conditions :** $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ signifie « droite **parallèle** au plan » ; $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{n}$ signifie « droite **orthogonale** au plan ».
- **Penser qu'une droite ou un plan a une seule écriture.** $x + y - 2 = 0$ et $2x + 2y - 4 = 0$ décrivent le même plan ; deux représentations paramétriques différentes peuvent décrire la même droite.

3 Avec Python

Le programme ne liste pas d'algorithme pour ce chapitre. Cette fonction automatise l'étude d'une droite et d'un plan : elle calcule $\vec{u} \cdot \vec{n}$, puis le paramètre du point d'intersection. En remplaçant $M = A + t \vec{u}$ dans l'équation, on obtient $\text{val} + t(\vec{u} \cdot \vec{n}) = 0$, où « val » est la valeur de $ax + by + cz + d$ au point A . Le module fractions donne des résultats exacts.

```
from fractions import Fraction Python

def droite_plan(A, u, P):
    """Droite passant par A, dirigée par u ; plan P = (a, b, c, d) d'équation ax+by+cz+d=0"""
    a, b, c, d = P
    un = a*u[0] + b*u[1] + c*u[2]          # produit scalaire u.n
    val = a*A[0] + b*A[1] + c*A[2] + d     # valeur de ax+by+cz+d au point A
    if un == 0:                             # droite parallèle au plan
        if val == 0:
            return "droite contenue dans le plan"
        return "droite strictement parallèle au plan"
    t = Fraction(-val, un)                  # on résout val + t*un = 0
    H = [A[i] + t*u[i] for i in range(3)]
    return "sécants en (" + " ; ".join(str(x) for x in H) + ")"

print(droite_plan([1, 2, 0], [1, -1, 3], (2, -1, 1, -3))) # exemple du cours
print(droite_plan([0, 0, 1], [1, 1, 1], (1, -2, 1, 5)))
print(droite_plan([1, 3, 0], [1, 1, 1], (1, -2, 1, 5)))

# Affichage obtenu :
# sécants en (3/2 ; 3/2 ; 3/2)
# droite strictement parallèle au plan
# droite contenue dans le plan
```

4 Exercices

Dans tous les exercices, l'espace est muni d'un repère orthonormé.

Exercice 1 ★

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) avec $A(2; -1; 0)$ et $B(4; 0; -3)$.
2. Les points $C(8; 2; -9)$ et $D(0; -2; 4)$ appartiennent-ils à (AB) ?
3. Donner un point et un vecteur directeur de la droite $d : \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 5 \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Exercice 2 ★

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(2; 1; -3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1; -2; 3)$. Le point $B(-1; 1; -2)$ appartient-il à $\mathcal{P}$?
2. Donner un vecteur normal au plan $\mathcal{Q} : 3x - z + 2 = 0$. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont-ils perpendiculaires ?

Exercice 3 ★★

Soient $A(1; 1; 0)$, $B(2; 0; 1)$ et $C(0; 2; 2)$.

1. Montrer que A, B, C définissent un plan, puis déterminer une équation cartésienne de (ABC) .
2. Soit $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$. Montrer que d coupe (ABC) et déterminer le point d'intersection.

Exercice 4 ★★

On considère les droites suivantes (où t, s et k décrivent $\mathbb{R}$) :

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = -2 + s \\ z = 6 - 2s \end{cases} \quad d_3 : \begin{cases} x = 5 - 4k \\ y = 2k \\ z = -2k \end{cases}$$

1. Montrer que d_1 et d_2 sont sécantes et donner leur point d'intersection.
2. Déterminer la position relative de d_1 et d_3 .

Exercice 5 ★★★ (type bac)

On considère le plan $\mathcal{P} : 2x + y - 2z + 4 = 0$, le plan $\mathcal{P}' : x - y + z - 2 = 0$ et le point $M(2; 1; 0)$.

1. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ à $\mathcal{P}$ et vérifier que $A(0; -4; 0)$ appartient à $\mathcal{P}$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par M et orthogonale à $\mathcal{P}$.
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{P}$, puis la distance de M à $\mathcal{P}$.
4. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants, et que leur droite d'intersection D admet pour représentation

$$\text{paramétrique } \begin{cases} x = t \\ y = 4t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \text{ Vérifier que } H \in D.$$

5. Calculer la distance de M au plan $\mathcal{P}'$. Le point M est-il plus proche de $\mathcal{P}$ ou de $\mathcal{P}'$?

5 Teste-toi (QCM)

1. Une représentation paramétrique de la droite passant par $A(1; 0; -2)$ et dirigée par $\vec{u}(3; -1; 1)$ est :
A. $x = 3 + t, y = -1, z = 1 - 2t$ **B.** $x = 1 + 3t, y = -t, z = -2 + t$
C. $x = 1 + 3t, y = 1 - t, z = -2 + t$ **D.** $x = 3t, y = -t, z = t$
2. Un vecteur normal au plan d'équation $3x - z + 5 = 0$ est :
A. $(3; -1; 5)$ **B.** $(3; 0; -1)$
C. $(3; -1; 0)$ **D.** $(0; 3; -1)$
3. Le point $A(1; 2; -1)$ appartient au plan d'équation :
A. $x + y + z - 2 = 0$ **B.** $x - y + z = 0$
C. $2x + y - 3 = 0$ **D.** $x + y + z = 0$
4. Une droite de vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; -1)$ et le plan $x + y + 3z = 0$ sont :
A. sécants en un point **B.** orthogonaux
C. parallèles (ou droite contenue dans le plan) **D.** on ne peut rien dire
5. Les plans $2x - y + z - 1 = 0$ et $-4x + 2y - 2z + 2 = 0$ sont :
A. sécants **B.** strictement parallèles
C. confondus **D.** perpendiculaires

L'essentiel à retenir

- Droite par A dirigée par $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma) : x = x_A + \alpha t, y = y_A + \beta t, z = z_A + \gamma t$.
- Constantes : un point ; coefficients de t : un vecteur directeur.
- Plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c) : ax + by + cz + d = 0 ; d$ grâce à un point.
- Plan $(ABC) : \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
- Droite/plan : on injecte $x(t), y(t), z(t)$ dans l'équation.
- $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$: sécants ; $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$: parallèles.
- Deux plans : sécants selon une droite, sauf si $\vec{n}, \vec{n}'$ colinéaires.
- Deux droites : parallèles, sécantes ou non coplanaires (t et s).
- Projeté sur $\mathcal{P}$: droite par M dirigée par $\vec{n}$, coupée avec $\mathcal{P}$.

Exercice 1

1. $\overrightarrow{AB}(2; 1; -3)$, donc $(AB) : x = 2 + 2t, y = -1 + t, z = -3t$ ($t \in \mathbb{R}$).
2. $C : 2 + 2t = 8 \iff t = 3$; alors $y = -1 + 3 = 2$ et $z = -9$: $C \in (AB)$. $D : 2 + 2t = 0 \iff t = -1$; alors $y = -2$ (correct) mais $z = 3 \neq 4$: $D \notin (AB)$.
3. Pour $t = 0$: le point $(-1; 5; 2)$. Les coefficients de t donnent $\vec{u}(4; 0; -1)$ (le 0 car y ne dépend pas de t).

Exercice 2

1. $\mathcal{P} : x - 2y + 3z + d = 0$ et $A \in \mathcal{P} : 2 - 2 - 9 + d = 0$, donc $d = 9$: $\mathcal{P} : x - 2y + 3z + 9 = 0$. Pour B : $-1 - 2 - 6 + 9 = 0$, donc $B \in \mathcal{P}$.
2. $\vec{n}'(3; 0; -1)$. $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 3 + 0 - 3 = 0$: les vecteurs normaux sont orthogonaux, donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont perpendiculaires.

Exercice 3

1. $\overrightarrow{AB}(1; -1; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; 1; 2)$: les deux premières coordonnées sont opposées mais pas les troisièmes, ils ne sont pas colinéaires. On cherche $\vec{n}(a; b; c) : a - b + c = 0$ et $-a + b + 2c = 0$. En additionnant: $3c = 0$, donc $c = 0$ et $a = b$. On choisit $a = b = 1$: $\vec{n}(1; 1; 0)$.
 $(ABC) : x + y + d = 0$; avec $A : 1 + 1 + d = 0$, $d = -2$. Donc $(ABC) : x + y - 2 = 0$. Contrôle: $B : 2 + 0 - 2 = 0$; $C : 0 + 2 - 2 = 0$.
2. $\vec{u}(1; 1; 2)$ et $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 + 1 + 0 = 2 \neq 0$: sécants. On injecte: $(1 + t) + (3 + t) - 2 = 0 \iff 2t + 2 = 0 \iff t = -1$. Point d'intersection: $(0; 2; -2)$.

Exercice 4

1. $\vec{u}_1(2; -1; 1)$ et $\vec{u}_2(1; 1; -2)$ ne sont pas colinéaires ($1 = \frac{1}{2} \times 2$ mais $1 \neq \frac{1}{2} \times (-1)$). On résout $1 + 2t = 2 + s, -t = -2 + s, 3 + t = 6 - 2s$. La 1re donne $s = 2t - 1$; dans la 2e: $-t = 2t - 3$, donc $t = 1$ et $s = 1$. 3e équation: $3 + 1 = 4$ et $6 - 2 = 4$: vérifiée. Les droites sont sécantes en $(3; -1; 4)$.
2. $\vec{u}_3(-4; 2; -2) = -2\vec{u}_1$: d_1 et d_3 sont parallèles. Le point $(5; 0; 0)$ de d_3 est-il sur d_1 ? $1 + 2t = 5 \iff t = 2$, mais alors $y = -2 \neq 0$: non. Les droites sont **strictement parallèles**.

Exercice 5

1. $\vec{n}(2; 1; -2)$. Pour $A : 0 - 4 - 0 + 4 = 0$, donc $A \in \mathcal{P}$.
2. Δ est dirigée par $\vec{n} : x = 2 + 2t, y = 1 + t, z = -2t$ ($t \in \mathbb{R}$).
3. On injecte dans $\mathcal{P} : 2(2 + 2t) + (1 + t) - 2(-2t) + 4 = 0 \iff 9 + 9t = 0 \iff t = -1$.
Donc $H(0; 0; 2)$ et $\overrightarrow{MH}(-2; -1; 2)$: la distance de M à $\mathcal{P}$ est $MH = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$.
4. $\vec{n}(2; 1; -2)$ et $\vec{n}'(1; -1; 1)$ ne sont pas colinéaires ($1 = \frac{1}{2} \times 2$ mais $-1 \neq \frac{1}{2} \times 1$): les plans sont sécants suivant une droite. Pour tout t : $2t + 4t - 2(2 + 3t) + 4 = 0$ et $t - 4t + (2 + 3t) - 2 = 0$. La droite proposée est donc contenue dans les deux plans: c'est D . Avec $t = 0$ on obtient $(0; 0; 2) = H : H \in D$.
5. Droite passant par M dirigée par $\vec{n}' : (2 + s; 1 - s; s)$. On injecte dans $\mathcal{P}' : (2 + s) - (1 - s) + s - 2 = 0 \iff 3s - 1 = 0 \iff s = \frac{1}{3}$. Le projeté est $H'(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3})$ et la distance vaut $MH' = \frac{1}{3} \times \|\vec{n}'\| = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$. Comme $\frac{\sqrt{3}}{3} < 3$, M est plus proche de $\mathcal{P}'$.

QCM

1. B · 2. B (coefficient de $y : 0$) · 3. A ($1 + 2 - 1 - 2 = 0$) · 4. C ($\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 + 2 - 3 = 0$) · 5. C (la 2e équation est la 1re multipliée par -2)