

TERMINALE · SPÉCIALITÉ PHYSIQUE-CHIMIE

Dynamique d'un système électrique : le circuit RC

Comment le flash d'un appareil photo libère-t-il en une milliseconde l'énergie accumulée pendant plusieurs secondes ? Et comment ton écran tactile sait-il où se pose ton doigt ?

Ce que tu vas savoir faire

- Relier l'intensité d'un courant variable à la charge :
 $i = \frac{dq}{dt}$
- Utiliser les relations $q = C u_C$ et $i = C \frac{du_C}{dt}$ et citer des ordres de grandeur de capacités
- Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par u_C lors de la charge et de la décharge d'un condensateur
- Déterminer la constante de temps $\tau = RC$ à partir d'un relevé expérimental
- Calculer l'énergie stockée $\frac{1}{2} C u_C^2$ et expliquer le principe d'un capteur capacitif
- Simuler la charge d'un condensateur par la méthode d'Euler en Python

À revoir avant de commencer

- Loi des mailles, loi d'Ohm $u_R = Ri$, conventions générateur et récepteur (Première)
- Charge électrique, coulomb, intensité en régime continu $I = Q/\Delta t$ (Première)
- Fonction exponentielle, dérivée, équations différentielles $y' = ay + b$ (maths)
- Énergie et puissance électriques $E = P \Delta t$ (Première)
- Évolution exponentielle au contact d'un thermostat (fiche 13)

1 Le cours

1. L'intensité d'un courant variable

En Première, tu as étudié des courants **continus** : l'intensité I était constante. Mais quand on allume un appareil, quand un flash se déclenche ou quand ton doigt touche un écran, les tensions et les intensités **varient au cours du temps** : on parle de **régime variable**. On note alors les grandeurs en minuscules : $i(t)$, $u(t)$, $q(t)$.

Définition – Intensité en régime variable

L'intensité du courant est le **débit de charges électriques** : si une charge dq traverse une section du conducteur pendant une durée très courte dt ,

$$i = \frac{dq}{dt}$$

i en ampères (A), q en coulombs (C), t en secondes (s). En régime continu, on retrouve $I = \frac{Q}{\Delta t}$. Si $i = I$ est constante et $q(0) = 0$, alors $q(t) = I t$.

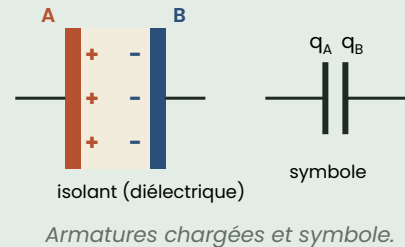
2. Le condensateur

Définition – Condensateur et capacité

- Un **condensateur** est formé de deux conducteurs, les **armatures**, séparés par un **isolant** (air, plastique, céramique...).
- Lorsqu'on le charge, les armatures portent des charges **opposées** : $q_A = q$ et $q_B = -q$. La charge **totale** du condensateur reste nulle : on appelle q la « charge du condensateur » (charge de l'armature positive).
- La charge est **proportionnelle** à la tension entre les armatures :

$$q = C u_C$$

q en coulombs (C) ; u_C en volts (V) ; C : **capacité** du condensateur, en **farads** (F), toujours positive.



Ordres de grandeur de capacités

Dispositif	capteur tactile, capteur MEMS	condensateur céramique	condensateur électrochimique	supercondensateur
C	pF (10^{-12} F)	pF à μ F	μ F à mF	1 F à quelques kF

Charges opposées sur des surfaces en regard : on retrouve ce « condensateur » dans de nombreuses situations : nuage d'orage et sol (la foudre est une décharge brutale), membrane d'une cellule nerveuse (ions de signes opposés de part et d'autre), deux pistes voisines d'un circuit imprimé, ton doigt et l'écran tactile.

Le farad est une **très grande** unité : attention aux préfixes $m = 10^{-3}$, $\mu = 10^{-6}$, $n = 10^{-9}$, $p = 10^{-12}$.

Relation intensité-tension À SAVOIR ÉTABLIR

En **convention récepteur** (flèches de i et de u_C de sens opposés, i orienté vers l'armature qui porte la charge q), on a $i = \frac{dq}{dt}$. Comme $q = C u_C$ avec C constante :

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$$

Conséquences à retenir

- Si u_C est **constante** (régime permanent), $i = 0$: en continu, un condensateur chargé se comporte comme un **interrupteur ouvert**.
- La tension u_C est une fonction **continue** du temps : elle ne peut pas « sauter » brusquement (il faudrait une intensité infinie). En revanche, l'intensité i peut varier brusquement.
- **Condensateur plan** (expression donnée dans les sujets) : $C = \frac{\epsilon S}{e}$ avec S la surface des armatures (m^2), e leur écartement (m) et ϵ la permittivité de l'isolant ($\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$; pour l'air, $\epsilon \approx \epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$). La capacité augmente si les armatures sont plus grandes ou plus proches.

Exemple résolu – Charge à courant constant

Un condensateur de capacité $C = 2200 \mu\text{F}$, initialement déchargé, est chargé par un générateur de courant qui débite $I = 2,0 \text{ mA}$ pendant $\Delta t = 5,0 \text{ s}$. Calculer la charge acquise puis la tension à ses bornes.

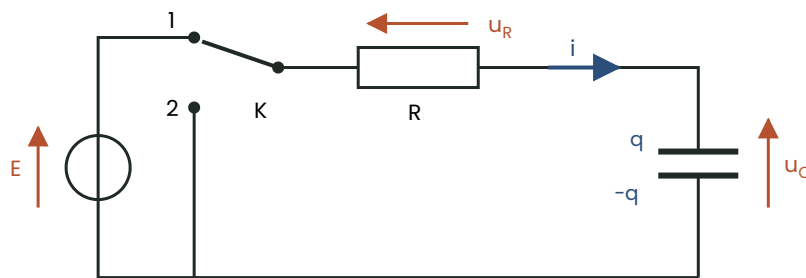
Solution

$$i = \frac{dq}{dt} = I \text{ constante, donc } q = I \Delta t = 2,0 \times 10^{-3} \times 5,0 = 1,0 \times 10^{-2} \text{ C.}$$

$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{1,0 \times 10^{-2}}{2200 \times 10^{-6}} \approx 4,5 \text{ V. (La tension augmente linéairement avec le temps.)}$$

3. Le circuit RC série : charge du condensateur

Comme un ballon qu'on gonfle et qui « résiste » de plus en plus : plus le condensateur est chargé, plus sa tension s'oppose à celle du générateur, et plus le courant de charge diminue.



Circuit RC série : position 1 de l'inverseur K, charge par le générateur de tension E ; position 2, décharge dans la résistance R .

Charge : équation différentielle et solution À SAVOIR ÉTABLIR

Situation : à $t = 0$, le condensateur est déchargé ($u_C(0) = 0$) et on bascule K en position 1. Le générateur est une **source idéale de tension** E .

Loi des mailles : $E = u_R + u_C$. Loi d'Ohm : $u_R = Ri$, avec $i = C \frac{du_C}{dt}$. D'où :

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \text{avec } \tau = RC.$$

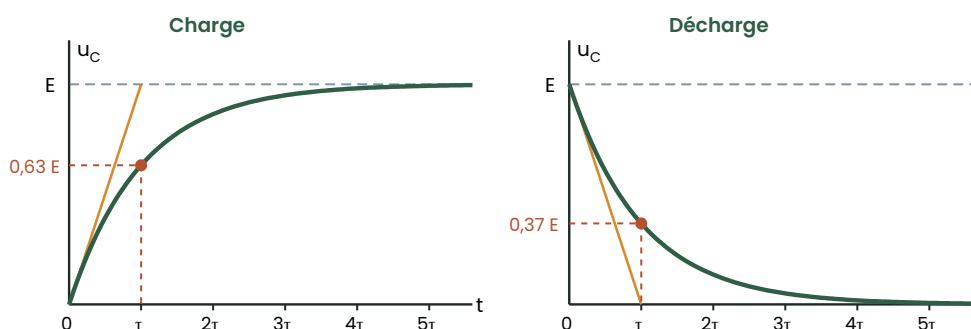
Résolution : équation du type $y' = ay + b$ avec $a = -\frac{1}{\tau}$: $u_C(t) = K e^{-t/\tau} + E$. La condition initiale $u_C(0) = 0$ donne $K + E = 0$, soit $K = -E$:

$$u_C(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{et} \quad i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}.$$

Vérification : $\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\tau} e^{-t/\tau}$ et $\frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau} - \frac{E}{\tau} e^{-t/\tau}$: la somme vaut bien $\frac{E}{\tau}$.

La constante de temps $\tau = RC$

- $\tau = RC$ s'exprime en **secondes** (R en Ω , C en F). En effet, $\Omega \cdot F = \frac{V}{A} \cdot \frac{C}{V} = \frac{C}{A} = s$ (car $1 A = 1 C \cdot s^{-1}$).
- À $t = \tau$: $u_C(\tau) = E(1 - e^{-1}) \approx 0,63 E$: le condensateur est chargé à **63 %**.
- À $t = 5\tau$: $u_C \approx 0,993 E$: on considère la charge **terminée** (régime permanent : $u_C = E, i = 0$).
- La tangente à l'origine de $u_C(t)$ coupe l'asymptote $u_C = E$ à la date $t = \tau$.
- τ caractérise la **rapidité** du circuit : plus R ou C est grand, plus la charge est lente.



Évolution de u_C (ici $E = 5 V$) : lecture de τ par la méthode des 63 % (charge), des 37 % (décharge) et de la tangente à l'origine.

Exemple résolu – Charge d'un condensateur de $100 \mu F$

On charge un condensateur de capacité $C = 100 \mu F$, initialement déchargé, à travers une résistance $R = 10 k\Omega$, avec un générateur idéal de tension $E = 5,0 V$.

1. Calculer τ et l'intensité à $t = 0$.
2. Calculer u_C à $t = 2,0 s$.
3. À quelle date u_C atteint-elle $4,0 V$?

Solution

1. $\tau = RC = 10 \times 10^3 \times 100 \times 10^{-6} = 1,0 s$. À $t = 0$, $u_C = 0$ donc $u_R = E$: $i(0) = \frac{E}{R} = \frac{5,0}{10 \times 10^3} = 5,0 \times 10^{-4} A = 0,50 mA$.
2. $u_C(2,0) = 5,0 \times (1 - e^{-2,0/1,0}) \approx 4,3 V$.
3. $4,0 = 5,0 (1 - e^{-t/\tau})$, donc $e^{-t/\tau} = 1 - \frac{4,0}{5,0} = 0,20$ et $t = -\tau \ln(0,20) = \tau \ln 5 \approx 1,6 s$.

4. La décharge du condensateur

Décharge : équation différentielle et solution À SAVOIR ÉTABLIR

Situation : le condensateur est chargé sous la tension E ; à $t = 0$, on bascule K en position 2 : le générateur est retiré du circuit, qui ne comporte plus que R et C .

Loi des mailles (mêmes orientations) : $u_R + u_C = 0$, soit $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \iff \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = 0$.

Solution avec $u_C(0) = E$ (continuité de la tension) :

$$u_C(t) = E e^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{E}{R} e^{-t/\tau}.$$

$i < 0$: le courant circule dans le sens **opposé** à celui de la charge. À $t = \tau$, $u_C = e^{-1} E \approx 0,37 E$; à $t = 5\tau$, le condensateur est pratiquement déchargé.

Méthode – Déterminer τ (puis C) à partir d'un relevé expérimental

- **Méthode des 63 % (charge) ou des 37 % (décharge) :** on lit la date où $u_C = 0,63 E$ (ou $0,37 E$) ; c'est τ .
- **Tangente à l'origine :** elle coupe l'asymptote finale ($u_C = E$ pour la charge, $u_C = 0$ pour la décharge) en $t = \tau$.
- **Logarithme (décharge) :** $\ln u_C = \ln E - \frac{t}{\tau}$ est une fonction affine de t de pente $-\frac{1}{\tau}$ (pour la charge, on utilise $\ln(E - u_C)$).
- Connaissant R , on en déduit la capacité : $C = \frac{\tau}{R}$.

Au labo – Étudier la charge et la décharge d'un condensateur

Montage : circuit RC série alimenté par un générateur basse fréquence (GBF) délivrant une tension en **crêteaux** (alternativement E et 0), ou par une alimentation continue et un inverseur. On visualise $u_C(t)$ à l'oscilloscope ou avec une interface d'acquisition (ou une carte microcontrôleur).

Précaution : pour observer des charges et décharges complètes, chaque demi-période doit durer au moins 5τ : $\frac{T}{2} \geq 5\tau$. Par exemple, avec $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ ($\tau = 1 \text{ ms}$), on choisit $f \leq 100 \text{ Hz}$.

Exploitation : on mesure τ (63 %) et on le compare à RC ; il double si l'on double R ou C . Pour visualiser $i(t)$, on enregistre $u_R = Ri$.

5. L'énergie stockée dans un condensateur

Relation – Énergie emmagasinée

Un condensateur de capacité C chargé sous la tension u_C stocke l'énergie :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C u_C^2$$

$\mathcal{E}$ en joules (J) ; C en farads (F) ; u_C en volts (V). Cette énergie est restituée lors de la décharge (dissipée par effet Joule dans R , ou convertie en lumière dans un flash...).

Exemple résolu – Le flash d'un appareil photo

Le condensateur d'un flash ($C = 150 \mu\text{F}$) est chargé sous 300 V en quelques secondes, puis se décharge dans la lampe en 1 ms environ. Calculer l'énergie stockée et la puissance moyenne pendant l'éclair.

Solution

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C u_C^2 = \frac{1}{2} \times 150 \times 10^{-6} \times 300^2 \approx 6,8 \text{ J.}$$

$$P = \frac{\mathcal{E}}{\Delta t} = \frac{6,75}{1 \times 10^{-3}} \approx 7 \times 10^3 \text{ W : l'énergie accumulée lentement (avec les piles de faible puissance) est libérée très vite, avec une puissance énorme.}$$

6. Les capteurs capacitifs

La capacité d'un condensateur dépend de sa géométrie (S, e) et de l'isolant (ϵ). Si une grandeur physique modifie l'un de ces paramètres, la mesure de C permet de la mesurer : c'est le principe d'un **capteur capacitif**.

Principe et exemples

- **Écran tactile** : une grille d'électrodes forme de petits condensateurs ; le doigt (conducteur) modifie localement leur capacité, ce qui permet de localiser le contact.
- **Accéléromètre MEMS** (smartphone, airbag) : une masse mobile porte une armature ; une accélération modifie l'écartement e , donc C .
- **Capteur d'humidité** : l'isolant absorbe la vapeur d'eau, ce qui modifie sa permittivité ϵ et donc C .
- Aussi : capteurs de niveau de liquide, de pression, microphones électrostatiques, claviers, détecteurs de proximité.
- **Mesure de C** : le capteur est placé dans un circuit RC ; un microcontrôleur mesure la durée de charge (proportionnelle à $\tau = RC$), ou la fréquence d'un oscillateur, et en déduit C .

Au labo – Tester le comportement capacitif d'un capteur

Deux plaques d'aluminium séparées par des feuilles de papier constituent un condensateur plan. On mesure sa capacité au capacimètre (quelques dizaines à centaines de pF) en faisant varier l'écartement (nombre de feuilles) ou la surface en regard : C augmente quand e diminue ou quand S augmente, en accord avec $C = \frac{\epsilon S}{e}$. On peut aussi mesurer τ dans un circuit RC avec une grande résistance ($R \approx 1 \text{ M}\Omega$).

2 Les pièges à éviter

Attention – Les erreurs classiques

- **Les préfixes.** $100 \mu\text{F} = 100 \times 10^{-6} \text{ F} = 1,00 \times 10^{-4} \text{ F}$; $220 \text{ nF} = 2,20 \times 10^{-7} \text{ F}$; $4,7 \text{ k}\Omega = 4,7 \times 10^3 \Omega$. Une erreur de préfixe fausse τ d'un facteur 1000 !
- $\tau = RC$, pas R/C . Et τ est une durée (en s) : vérifier l'homogénéité.
- **À $t = \tau$, la charge n'est pas terminée.** $u_C = 63 \%$ de E seulement ; il faut environ 5τ pour atteindre le régime permanent.
- **Confondre charge et décharge.** Charge : $u_C = E(1 - e^{-t/\tau})$, croissante ; décharge : $u_C = E e^{-t/\tau}$, décroissante. Toujours vérifier la valeur en $t = 0$ et la limite en $+\infty$.

- **La continuité.** u_C est continue (pas de saut) ; c'est i qui peut changer brusquement : à la fermeture, i passe de 0 à E/R .
- **Le signe de i à la décharge** est négatif avec l'orientation de la charge : ce n'est pas une erreur, le courant circule en sens inverse. Et $i = C \frac{du_C}{dt}$ n'est valable qu'en **convention récepteur**.

3 Avec Python

La **méthode d'Euler** résout numériquement $\frac{du_C}{dt} = \frac{E-u_C}{\tau}$: sur un petit pas Δt , on assimile la courbe à sa tangente :

$$u_C(t + \Delta t) \approx u_C(t) + \Delta t \times \frac{E - u_C(t)}{\tau}.$$

```
from math import exp

E, R, C = 5.0, 10e3, 100e-6 # tension (V), résistance (ohms), capacité (F)
tau, dt = R * C, 0.05      # constante de temps et pas de calcul (s)

t, u = 0.0, 0.0             # condensateur déchargé à t = 0
print("t (s) | Euler (V) | exacte (V)")
for k in range(101):
    if k % 20 == 0:         # affichage toutes les secondes
        exacte = E * (1 - exp(-t / tau))
        print(f"{t:5.1f} | {u:9.3f} | {exacte:10.3f}")
    u = u + dt * (E - u) / tau # Euler : du/dt = (E - u)/tau
    t = t + dt
```

Python

Affichage obtenu dans la console :

```
t (s) | Euler (V) | exacte (V)
0.0 | 0.000 | 0.000
1.0 | 3.208 | 3.161
2.0 | 4.357 | 4.323
3.0 | 4.770 | 4.751
4.0 | 4.917 | 4.908
5.0 | 4.970 | 4.966
```

Python

À $t = \tau = 1$ s, on retrouve 63 % de E (3,16 V). Euler surestime légèrement u_C (courbe concave : la tangente passe au-dessus) ; l'écart diminue avec le pas. Tracées avec matplotlib, les deux courbes sont quasi superposées.

4 Exercices

Exercice 1 – Charge à courant constant ★

Un condensateur de capacité $C = 47 \mu\text{F}$, initialement déchargé, est traversé par un courant constant $I = 20 \mu\text{A}$ pendant 10 s.

1. Calculer la charge q acquise.
2. En déduire la tension u_C à ses bornes, puis l'énergie stockée.

Exercice 2 – Calculer une constante de temps ★

Un circuit RC série comporte $R = 4,7 \text{ k}\Omega$ et $C = 220 \text{ nF}$. Il est alimenté par une source idéale de tension $E = 12 \text{ V}$.

1. Calculer τ .
2. Au bout de combien de temps peut-on considérer la charge terminée ?
3. Que vaut u_C à la date $t = \tau$?

Exercice 3 – Décharge ★★

Un condensateur de capacité $C = 2200 \text{ }\mu\text{F}$, chargé sous $U_0 = 9,0 \text{ V}$, se décharge à $t = 0$ dans une résistance $R = 1,0 \text{ k}\Omega$.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par u_C et donner sa solution.
2. Calculer τ , puis la date $t_{1/2}$ à laquelle la tension a diminué de moitié. Montrer que $t_{1/2} = \tau \ln 2$.
3. Quelle fraction de l'énergie initiale reste stockée à $t_{1/2}$?

Exercice 4 – Exploiter un relevé ★★

On charge un condensateur de capacité inconnue à travers $R = 33 \text{ k}\Omega$ sous $E = 6,0 \text{ V}$. On obtient :

$t \text{ (s)}$	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,70	1,0	1,5
$u_C \text{ (V)}$	0	1,57	2,73	3,58	4,21	4,68	5,28	5,71	5,94

1. Déterminer τ par la méthode des 63 %.
2. En déduire la capacité C .
3. Vérifier le résultat en calculant u_C théorique à $t = 1,0 \text{ s}$.

Exercice 5 – Type bac : un capteur capacitif d'humidité ★★★

Une station météo utilise un capteur d'humidité capacitif. Pour mesurer sa capacité, on l'insère dans un circuit RC série avec une résistance $R = 1,0 \text{ M}\Omega$, alimenté par un signal en créneaux de valeurs $E = 5,0 \text{ V}$ et 0 V . Un microcontrôleur mesure la durée τ nécessaire pour que u_C passe de 0 à 63 % de E .

Document 1 – Caractéristique du capteur. Sa capacité dépend de l'humidité relative HR (en %) selon $C = C_0 + a \cdot HR$, avec $C_0 = 163 \text{ pF}$ et $a = 0,31 \text{ pF}$ par point d'humidité, pour HR entre 0 et 100 %.

Document 2 – Principe. L'isolant, un polymère, absorbe l'eau, de permittivité très élevée.

1. Schématiser le circuit de charge avec u_R , u_C et i (convention récepteur).
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par u_C pendant la charge ($u_C(0) = 0$).
3. Vérifier que $u_C(t) = A(1 - e^{-t/\tau})$ est solution et déterminer A et τ .
4. Montrer qu'à la date $t = \tau$, u_C vaut 63 % de E .
5. Le microcontrôleur mesure $\tau = 187 \text{ }\mu\text{s}$. Calculer la capacité du capteur puis l'humidité relative.
6. Calculer $\tau_{\max}$ (doc. 1), puis la fréquence maximale du signal (demi-période $\geq 5\tau$).
7. Calculer l'énergie stockée en fin de charge lors de la mesure de la question 5. Commenter.
8. Expliquer, avec le document 2 et $C = \frac{\epsilon S}{e}$, pourquoi C augmente avec l'humidité.

5 Teste-toi (QCM)

- 1 Le produit RC s'exprime en :
 - A. ohms
 - B. farads
 - C. secondes
 - D. il est sans unité
- 2 Un condensateur de $470 \mu\text{F}$ chargé sous 10 V porte la charge :
 - A. $4,7 \text{ mC}$
 - B. 47 mC
 - C. $4,7 \text{ C}$
 - D. $47 \mu\text{C}$
- 3 Lors de la charge sous la tension E , à la date $t = \tau$:
 - A. $u_C = E$
 - B. $u_C \approx 0,37 E$
 - C. $u_C \approx 0,63 E$
 - D. $u_C = 0,5 E$
- 4 En convention récepteur, l'intensité traversant un condensateur est :
 - A. $i = C u_C$
 - B. $i = C \frac{du_C}{dt}$
 - C. $i = \frac{1}{C} \frac{du_C}{dt}$
 - D. $i = \frac{u_C}{R}$
- 5 Si on double la résistance d'un circuit RC, la durée de charge :
 - A. est divisée par 2
 - B. ne change pas
 - C. est multipliée par 2
 - D. est multipliée par 4
- 6 Un supercondensateur de $1,0 \text{ F}$ chargé sous $2,0 \text{ V}$ stocke l'énergie :
 - A. $1,0 \text{ J}$
 - B. $2,0 \text{ J}$
 - C. $4,0 \text{ J}$
 - D. $0,50 \text{ J}$

L'essentiel à retenir

- Régime variable : $i = \frac{dq}{dt}$ (A, C, s).
- Condensateur : $q = C u_C$ (C en farads F) ; du pF au mF (supercondensateurs : jusqu'au kF).
- $i = C \frac{du_C}{dt}$ (convention récepteur) ; $i = 0$ en régime permanent ; u_C est continue.
- Charge : $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$ et $u_C = E(1 - e^{-t/\tau})$.
- Décharge : $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$ et $u_C = E e^{-t/\tau}$.
- $\tau = RC$ (s) : à $t = \tau$, 63 % de E (charge) ou 37 % (décharge) ; la tangente à l'origine coupe l'asymptote en τ ; régime permanent vers 5τ ; $C = \tau/R$.
- Énergie stockée : $\mathcal{E} = \frac{1}{2} C u_C^2$ (J).
- Capteur capacitif : la grandeur mesurée modifie S , e ou ε dans $C = \frac{\varepsilon S}{e}$, donc τ .
- Euler : $u_{k+1} = u_k + \Delta t \frac{E - u_k}{\tau}$.

6 Corrigés

Exercice 1

1. I constante : $q = I \Delta t = 20 \times 10^{-6} \times 10 = 2,0 \times 10^{-4} \text{ C}$.
2. $u_C = \frac{q}{C} = \frac{2,0 \times 10^{-4}}{47 \times 10^{-6}} \approx 4,3 \text{ V}$; $\mathcal{E} = \frac{1}{2} C u_C^2 = \frac{1}{2} \times 47 \times 10^{-6} \times 4,26^2 \approx 4,3 \times 10^{-4} \text{ J}$.

Exercice 2

1. $\tau = RC = 4,7 \times 10^3 \times 220 \times 10^{-9} \approx 1,0 \times 10^{-3} \text{ s} = 1,0 \text{ ms}$.
2. Au bout de $5\tau \approx 5,2 \text{ ms}$.
3. $u_C(\tau) = E(1 - e^{-1}) = 12 \times 0,632 \approx 7,6 \text{ V}$.

Exercice 3

1. Loi des mailles : $u_R + u_C = 0$ avec $u_R = Ri = RC \frac{du_C}{dt}$, d'où $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$. Solution : $u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau}$ avec $\tau = RC$.
2. $\tau = 1,0 \times 10^3 \times 2200 \times 10^{-6} = 2,2 \text{ s}$. $u_C(t_{1/2}) = \frac{U_0}{2}$ donne $e^{-t_{1/2}/\tau} = \frac{1}{2}$, soit $t_{1/2} = \tau \ln 2 \approx 1,5 \text{ s}$.
3. $\mathcal{E}$ est proportionnelle à u_C^2 : si u_C est divisée par 2, l'énergie est divisée par 4. Il reste $\frac{1}{4}$ (25 %) de l'énergie initiale.

Exercice 4

1. $0,632 \times 6,0 \approx 3,79 \text{ V}$, atteint entre 0,30 s (3,58 V) et 0,40 s (4,21 V) ; par interpolation linéaire, $t \approx 0,30 + 0,10 \times \frac{3,79 - 3,58}{4,21 - 3,58} \approx 0,33 \text{ s}$. Donc $\tau \approx 0,33 \text{ s}$.
2. $C = \frac{\tau}{R} = \frac{0,33}{33 \times 10^3} = 1,0 \times 10^{-5} \text{ F} = 10 \mu\text{F}$.
3. $u_C(1,0) = 6,0 \times (1 - e^{-1,0/0,33}) \approx 5,7 \text{ V}$, en accord avec la mesure (5,71 V).

Exercice 5

1. Schéma identique à celui du cours (générateur de créniaux à la place de E et de l'inverseur) : i orienté vers l'armature q , flèches u_R et u_C opposées à i .
2. Pendant la charge, le générateur délivre E : $E = u_R + u_C = RC \frac{du_C}{dt} + u_C$.
3. $\frac{du_C}{dt} = \frac{A}{\tau} e^{-t/\tau}$; en reportant : $RC \frac{A}{\tau} e^{-t/\tau} + A - A e^{-t/\tau} = E$ pour tout t . Il faut $A = E$ (termes constants) et $\frac{RC}{\tau} = 1$ (termes en exponentielle), soit $\tau = RC$. De plus $u_C(0) = 0$: la condition initiale est vérifiée.
4. $u_C(\tau) = E(1 - e^{-1}) \approx 0,632 E$, soit 63 % de E .
5. $C = \frac{\tau}{R} = \frac{187 \times 10^{-6}}{1,0 \times 10^6} = 1,87 \times 10^{-10} \text{ F} = 187 \text{ pF}$. $HR = \frac{C - C_0}{a} = \frac{187 - 163}{0,31} \approx 77 \%$.

6. $C_{\max} = 163 + 0,31 \times 100 = 194 \text{ pF}$, donc $\tau_{\max} = RC_{\max} = 194 \text{ } \mu\text{s}$. Il faut $\frac{T}{2} \geq 5\tau_{\max}$, soit $T \geq 10\tau_{\max} = 1,94 \text{ ms}$ et $f = \frac{1}{T} \leq \frac{1}{1,94 \times 10^{-3}} \approx 5,2 \times 10^2 \text{ Hz}$.

7. $\mathcal{E} = \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2} \times 187 \times 10^{-12} \times 5,0^2 \approx 2,3 \times 10^{-9} \text{ J}$: énergie infime, la mesure ne consomme presque rien (idéal pour un capteur alimenté sur pile).

8. L'eau absorbée augmente la permittivité ε de l'isolant ; S et e étant fixes, $C = \frac{\varepsilon S}{e}$ augmente avec l'humidité.

QCM

1. C ($\Omega \cdot F = s$) · 2. A ($q = CU = 470 \times 10^{-6} \times 10 = 4,7 \times 10^{-3} \text{ C}$) · 3. C ($1 - e^{-1} \approx 0,63$) · 4. B · 5. C ($\tau = RC$ doublée, donc 5τ aussi) · 6. B ($\frac{1}{2} \times 1,0 \times 2,0^2 = 2,0 \text{ J}$).